6. Korlátos változású függvények

I. Mutassuk meg, hogy ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható, akkor Lebesgue-integrálható is, és ebben az esetben

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\,\lambda$$

teljesül, ahol λ jelöli a Lebesgue-mértéket.

II. Mutassuk meg, hogy ha az $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ függvénynek létezik az improprius integrálja a $[0, \infty[$ halmazon, akkor abból még nem következik, hogy f Lebesgue-integrálható ugyanott.

III. Mutassuk meg, hogy ha az $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ függvény abszolútértékének létezik az improprius integrálja a $[0, \infty[$ halmazon, akkor f Lebesgue-integrálható ugyanott.

IV. Függvények teljes változása.
Adott $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén legyen

$$\mathrm{Var}(f, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} : x_i < x_{n-1}, x_1 = a, x_n = b \right\}$$

Határozzuk meg a

$$\mathrm{Var}(\exp, [0, 50]), \qquad \mathrm{Var}(\cos, [0, 4\pi]), \qquad \mathrm{Var}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^3, [1, -1])$$

mennyiségeket.

V. Korlátos változású függvények.
Legyen

$$\mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R}) = \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} |\ \mathrm{Var}(f, [a, b]) < \infty \}.$$

1. Igazoljuk, hogy ha $f \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor
$$\mathrm{Var}(\lambda f, [a, b]) = |\lambda| \cdot \mathrm{Var}(f, [a, b])$$
teljesül, vagyis $\lambda f \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$.
2. Igazoljuk, hogy ha $f, g \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$, akkor
$$\mathrm{Var}(f + g, [a, b]) \leq \mathrm{Var}(f, [a, b]) + \mathrm{Var}(g, [a, b])$$
teljesül, vagyis $f + g \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$.
3. Igazoljuk, hogy ha $f, g \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$, akkor $fg \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$.
4. Legyen $a < b < c$ és $f \in \mathrm{BV}([a, b], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy
$$\mathrm{Var}(f, [a, c]) = \mathrm{Var}(f, [a, b]) + \mathrm{Var}(f, [b, c])$$
teljesül, vagyis $f \in \mathrm{BV}([a, c], \mathbb{R})$.

VI. Definiáljuk az alábbi függvényeket.

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \end{cases}$$

Teljesül-e az $f \in \mathrm{BV}([0,1]\,, \mathbb{R})$ vagy a $g \in \mathrm{BV}([0,1]\,, \mathbb{R})$ tartalmazás?