7. Lebesgue-Stieltjes-integrál

I. Számoljuk ki az alábbi $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}\,\lambda_g(x)$ alakú integrálokat, ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ korlátos változású függvény és $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ mérhető függvény.

1. $\int\limits_{-1}^{b} x\,\mathrm{d}\,\lambda_{g_1}(x)$ $\qquad g_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x=-1; \\ 1, & \text{ha } x\in\,]-1,2[\,; \\ -1, & \text{ha } x\in[2,3]\,. \end{cases}$ $\qquad b\in[-1,3]$

2. $\int\limits_{0}^{2} x^2\,\mathrm{d}\,\lambda_{g_2}(x)$ $\qquad g_2(x)=\begin{cases} -1, & \text{ha } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right[; \\ 0, & \text{ha } x\in\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[; \\ 2, & \text{ha } x=\frac{3}{2}; \\ -2, & \text{ha } x\in\left]\frac{3}{2},2\right]. \end{cases}$

3. $\int\limits_{-2}^{2} x\,\mathrm{d}\,\lambda_{g_3}(x)$ $\qquad g_3(x)=\begin{cases} x+2, & \text{ha } x\in[-2,-1]\,; \\ 2, & \text{ha } x\in\,]-1,0[\,; \\ x^2+3, & \text{ha } x\in[0,2]\,. \end{cases}$

4. $\int\limits_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}\,\lambda_{g_3}(x)$

5. $\int\limits_{-2}^{2} x^3+1\,\mathrm{d}\,\lambda_{g_3}(x)$

6. $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{d}\,\lambda_{\varphi}(x)$ $\qquad \varphi$ az ördöglépcső függvény.

II. Igazoljuk, hogy minden véges előjeles mérték korlátos. (Vagyis ha $(X,\mathcal{A})$ mérhető tér és $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ olyan előjeles mérték, melyre minden $A\in\mathcal{A}$ esetén $\mu(A)\in\mathbb{R}$ teljesül, akkor létezik olyan $K\in\mathbb{R}^+$, hogy minden $A\in\mathcal{A}$ halmazra $|\mu(A)|<K$ teljesül.)

III. Legyen $X=\mathbb{N}^+$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$, μ a számláló mérték a $\mathcal{A}$ halmazon és $\alpha\in\mathbb{R}^+$. Minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$s_n:X\to\mathbb{C}\qquad k\mapsto\begin{cases} n^{-\alpha}, & \text{ha } k\le n; \\ 0, & \text{ha } k>n. \end{cases}$$

Mely $p\in[1,\infty]$ paraméterek esetén lesz az $n\mapsto s_n$ sorozat konvergens az $L^p(X,\mu)$ térben?

IV. Legyen $X=\mathbb{N}^+$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$, μ a számláló mérték a $\mathcal{A}$ halmazon és $1\le p<q\le\infty$. Igazoljuk az alábbiakat.

$$L^p(X,\mu)\subseteq L^q(X,\mu)\qquad L^q(X,\mu)\not\subseteq L^p(X,\mu)$$

V. Legyen $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ az $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazai és λ a Lebesgue-mérték. Igazoljuk az alábbiakat.

$$L^1(X,\mu) \not\subseteq L^2(X,\mu) \qquad L^2(X,\mu) \not\subseteq L^1(X,\mu)$$

VI. Jelölje λ a $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazain értelmezett Lebesgue-mértéket illetve minden $a \in \mathbb{R}$ esetén δ_a az a pontra koncentrált Dirac-mértéket. Számoljuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_{\mathbb{R}} x^3 + 3x + 1 \,\mathrm{d}\left(\frac{\delta_0 + \delta_1}{2}\right)(x) \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}\left(\lambda + \delta_0\right)(x)$$