8. L^p-terek és mértékek felbontása

I. Legyen $X = \mathbb{N}^+$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ és μ a számláló mérték a $\mathcal{A}$ halmazon.

1. Írjuk fel a Hölder-egyenlőtlenséget az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérre.
2. Írjuk fel a Minkowski-egyenlőtlenséget az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérre.

II. Legyen $X = \mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ a $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazainak a halmaza. Jelölje λ a $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazain értelmezett Lebesgue-mértéket illetve minden $a \in \mathbb{R}$ esetén δ_a az a pontra koncentrált Dirac-mértéket, legyen továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméter. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^2 + 2x + 2\right) \chi_{[-1,2]}(x)$ és a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x\chi_{[-1,2]}(x)$ függvényt, továbbá a $\mu = \alpha\lambda + \beta\delta_0$ mértéket.

1. Mely $p \in [1, \infty]$ esetén teljesül az $f \in L^p(X, \mu)$ tartalmazás?
2. Számoljuk ki $\|f\|_p$ értékét.
3. Számoljuk ki a $\|g + f\|_p$ és $\|g\|_p$ értékeket, valamint írjuk fel ezen függvényekre a Minkowski-egyenlőtlenséget.
4. Számoljuk ki a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |fg| \,\mathrm{d}\,\mu$ mennyiséget és adott p paraméter esetén az $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ egyenletből kapott q számra a $\|g\|_q$ mennyiséget. Írjuk fel ezen függvényekre a Hölder-egyenlőtlenséget.

III. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér. Igazoljuk, hogy minden $1 \le r < p \le \infty$ paraméterre $L^p(X, \mu) \subseteq L^r(X, \mu)$, valamint minden $f \in L^p(X, \mu)$ függvényre

$$\|f\|_r \le \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p$$

teljesül.

IV. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $1 < p, q, r$ olyan valós számok, melyekre $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor minden $f \in L^p(X, \mu)$ és $g \in L^q(X, \mu)$ függvényre

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$$

teljesül, vagyis $fg \in L^r(X, \mu)$.

V. Legyen $X = \mathbb{R}$ és $\mathcal{A}$ a $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazainak a halmaza. Jelölje λ a $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető részhalmazain értelmezett Lebesgue-mértéket illetve minden $a \in \mathbb{R}$ esetén δ_a az a pontra koncentrált Dirac-mértéket, legyen továbbá $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméter. Tekintsük a $\mu_1 = \lambda + \alpha\delta_0 + \beta\delta_1$ és a $\mu_2 = \lambda + \delta$ mértéket.

1. Mely α, β paraméterek esetén teljesül a $\mu_1 << \mu_2$ reláció?
2. Mely α, β paraméterek esetén teljesül a $\mu_1 \perp \mu_2$ reláció?
3. Adjuk meg a μ_1 mérték $\mu_1 = \mu_a + \mu_s$ alakú felbontását, ahol $\mu_a << \mu_2$ és $\mu_s \perp \mu_2$ teljesül.