9. Komplex függvények differenciálása

I. Számoljuk ki az $\ln(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})$, $\ln(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})$, $(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})^{\mathrm{i}}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\pi\right)$, $\ln(-4\,\mathrm{i})$, $\mathrm{ch}(6\,\mathrm{i}$, $\cos(1+\mathrm{i})$ kifejezések valós illetve képzetes részét!

II. A komplex számok körében oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

1.	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\bar{z}} + 5 = 0$	4.	$\sin(2z) + 3\,\mathrm{i} = 0$
2.	$\mathrm{ch}\, z = 0$	5.	$\mathrm{sh}(3\,\mathrm{i}\,\bar{z}) = 0$
3.	$\sin z = \mathrm{i} \cos z$	6.	$\sin z = -2\,\mathrm{i} \cos z$

III. Igazoljuk, hogy $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ teljesül.

IV. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \mathrm{sh}(3\,\mathrm{i}\,\bar{z})$. Hol differenciálható és hol reguláris az f függvény? Mibe viszi át az f függvény a $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{\pi}{6}$ egyenest?

V. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{C} \setminus \mathrm{i} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{z+1}{z+\mathrm{i}}$$

leképezésnél a nyújtási együtthatót, illetve az elforgatási szöget a $z_0 = 1$ pontban!

VI. Cauchy–Riemann-egyenletek alkalmazása.

1. Hol differenciálható és hol reguláris az $f(x + \mathrm{i}\, y) = (x^3 + 2xy) + i(3x^2 y + 6y)$ függvény?
2. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy a $v(x, y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$ függvény egy az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény valós része legyen!
3. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az $u(x, y) = cx^3 + 36xy^2 + xy$ függvény egy az egész komplex számsíkon értelmezett reguláris függvény képzetes része legyen!
4. Milyen c érték mellett létezik a $v(x, y) = -x^3 + cxy^2 - y$ függvénynek harmonikus párja? Keressük meg, azt az $u(x, y)$ harmonikus párt, melyre $u(0, 0) = 0$ teljesül!

VII. Legyen $u(x, y) = x^3 + cxy^2 - 2xy$.

1. Határozzuk meg a c paraméter értékét úgy, hogy az u egy reguláris f függvény valós része legyen!
2. Írjuk fel ezen f függvények közül azt, amelynél az $f(-1 + i)$ függvényérték valós!
3. Határozzuk meg $f'(-1 + i)$ értékét!
4. Legyen g az origóból a $(-1+i)$ pontba irányított szakasz. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_g f'(z)dz$ integrál értékét!

VIII. Számoljuk ki az alábbi $\int_\gamma f$ alakú integrálokat.

1. $f(z) = \mathrm{e}^{2\bar{z}}$ és γ az origóból a $-1 + \mathrm{i}$ pontba menő szakasz.
2. $f(z) = \bar{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással.
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ és γ az origó körüli egységsugarú kör pozitív irányítással.

9. hét, Analízis 3, matematikusoknak, 2014.11.07., Andai Attila.