10. Komplex vonalintegrál

I. Tekintsük a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} -3 - 2\,\mathrm{i} + 24t & \text{ha} \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \\ 3 - 2\,\mathrm{i} + 4(4t-1)\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, \\ 3 + 2\,\mathrm{i} - 12(2t-1) & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, \\ -3 + 2\,\mathrm{i} - 4(4t-3)\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbét. Határozzuk meg a görbe indexfüggvényének az értékét az $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ pontban.

$$\left(\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\,\mathrm{d}\,\xi \right)$$

II. Számoljuk ki az adott f függvény és γ görbe mellett a $\int_\gamma f$ vonalmenti integrálokat.

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ $\quad\gamma:$ az origó körüli 2 egység sugarú kör
2. $f(z) = \dfrac{\exp z}{z-1}$ $\quad\gamma:$ az 1 körüli π egység sugarú kör
3. $f(z) = \dfrac{\mathrm{sh}\,z - z - \frac{z^3}{6}}{z^6}$ $\quad\gamma:$ az origó körüli 2 egység sugarú kör
4. $f(z) = \dfrac{\mathrm{sh}\,z - z - \frac{z^3}{6}}{z^5}$ $\quad\gamma:$ az origó körüli 3 egység sugarú kör
5. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^3}$ $\quad\gamma:$ az origó körüli 1 egység sugarú kör

(A feladatok megoldásánál használjuk fel, hogy $\gamma(t) = R\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,t)$ $(t \in [0,1],\ R \in \mathbb{R}^+)$ és $f(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ esetén

$$\int_\gamma f = \begin{cases} 2\pi\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad n = -1, \\ 0 & \text{ha} \quad n \neq -1 \end{cases}$$

teljesül.)

III. Legyen $0 < r < R$ pozitív valós szám, $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}}{z}$ és tekintsük a

$$\gamma_{r,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} r + 4t(R-r) & \text{ha } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \\ R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(4t-1)/2} & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, \\ \mathrm{i}(R + (4t-2)(r-R)) & \text{ha } t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, \\ r\,\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}(1-t)} & \text{ha } t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbét. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{Im}\left(\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_{r,R}} f\right) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}\,x - \frac{\pi}{2} = 0$$

teljesül!