11. Cauchy-féle integrálformula

I. Minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számra és $R \in \mathbb{R}^+$ paraméterre legyen

$$\gamma_{z_0,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto z_0 + R\,\mathrm{e}^{2\pi t\,\mathrm{i}}\,.$$

A Cauchy-féle integrálformula segítségével számoljuk ki az alábbi körintegrálokat!

1. $\displaystyle\oint_{\gamma_{-\mathrm{i},1}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z^2}}{z^2+9}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z} + z\cos z^2\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint_{\gamma_{2\,\mathrm{i},3}} \frac{\sin \mathrm{i}\,z}{(z-1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}\,z$

4. $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,4}} \frac{z^2+3}{z(z-2)^3}\,\mathrm{d}\,z$ 5. $\displaystyle\oint_{\gamma_{1,3}} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}-1}{(z-\mathrm{i})z}\,\mathrm{d}\,z$ 6. $\displaystyle\oint_{\gamma_{-1,3}} \frac{\sin z}{z(z-\mathrm{i})^2}\,\mathrm{d}\,z$

(Útmutatás: Használjuk fel, hogy ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan differenciálható függvény, melyre $\mathrm{Dom}\, f$ konvex és $\mathrm{Ran}\,\gamma_{z_0,R} \subseteq \mathrm{Dom}\, f$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra és $w \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Ran}\,\gamma_{z_0,R}$ paraméterre

$$\frac{n!}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\gamma_{z_0,R}} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z = \begin{cases} f^{(n)}(w) & \text{ha} \quad |w-z_0| < R, \\ 0 & \text{ha} \quad |w-z_0| > R \end{cases}$$

teljesül.)

II. Számoljuk ki a következő körintegrálokat, ahol csak a γ szakszonként folytonosan differenciálható görbe képét adtuk meg, azzal a konvencióval, hogy a γ görbe egyszer kerüli meg a 0 pontot pozitív irányítással.

1. $\displaystyle\oint_{|z-1|+|z+1|=4} \frac{\sin z}{(z-5\,\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}\,z$ 2. $\displaystyle\oint_{|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|=1} \frac{\cos z}{4z-3-3\,\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,z$ 3. $\displaystyle\oint_{\max\{|\mathrm{Re}\, z|,|\mathrm{Im}\, z|\}=1} \frac{\cos z}{4z-3-3\,\mathrm{i}}\,\mathrm{d}\,z$

III. Cauchy integrálformula következményei.

1. Igazoljuk az
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2p\cos x+p^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{2\pi}{1-p^2}$$
egyenlőséget, ahol $p \in \left]0,1\right[$.
(Útmutatás: A $z = \mathrm{e}^{x\,\mathrm{i}}$ helyettesítésel az integrált körintegrállá lehet transzformálni.)
2. Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ számra
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}\,x = \frac{3\pi}{8a^5}$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi\,\mathrm{e}^{-a}}{2a}$$
teljesül.
(Útmutatás: Mindkét esetben legyen $R \in \left]a,\infty\right[$ és integráljunk a
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} -R+4tR & \text{ha} \quad t \in \left[0,\frac{1}{2}\right[, \\ R\,\mathrm{e}^{\pi(2t-1)\,\mathrm{i}} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$$
görbe mentén, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket.)

3. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméterre

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{2}(b-a)$$

teljesül.
(Útmutatás: Legyen $r \in \left]0, \min(a,b)\right[$, $R \in \left]\max(a,b), \infty\right[$, és az

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, bz}}{z^2}$$

függvényt integráljuk a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} r + 4t(R-r) & \text{ha} \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \\ R\,\mathrm{e}^{\pi(4t-1)\,\mathrm{i}} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, \\ -R + (4t-2)(R-r) & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, \\ r\,\mathrm{e}^{4\pi(1-t)\,\mathrm{i}} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbe mentén, majd vegyük az $R \to \infty$ és $r \to 0$ határértékeket!)

4. Legyen $p \in \left]0, 1\right[$, bizonyítsuk be az

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}}{1+e^x} \,\mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

egyenlőséget.
(Útmutatás: Legyen $R \in \left]p, \infty\right[$ és integráljuk az

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{pz}}{1 + \mathrm{e}^z}$$

függvényt a

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \begin{cases} -R + 8tR & \text{ha} \quad t \in \left[0, \frac{1}{4}\right[, \\ R + (4t-1)2\pi\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[, \\ R - 2R(4t-2) + 2\pi\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[, \\ -R + (1-t)8\pi\,\mathrm{i} & \text{ha} \quad t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

görbe mentén, majd vegyük az $R \to \infty$ határértéket!)