12. Cauchy-féle integrálformula következményei

I. Ha $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sorozat, akkor vezessük be a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k := a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

jelölést abban az esetben, ha $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\right| < \infty$ és $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| < \infty$ is teljesül. Igazoljuk az alábbi formulákat.

1. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} :$ $\qquad \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}$
2. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right) :$ $\qquad \dfrac{\pi^2}{\cos^2(\pi z)} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(z+k-\frac{1}{2}\right)^2}$
3. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} :$ $\qquad \operatorname{ctg}(\pi z) = \dfrac{1}{\pi z} + \dfrac{2z}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}$
4. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{Z} + \dfrac{1}{2}\right) :$ $\qquad \operatorname{tg}(\pi z) = \dfrac{2z}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2}$

II. Tekintsük az

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha t)}$$

függvényt, ahol $\alpha \in \mathbb{R}^+$ paraméter.

1. Legyen $b = \dfrac{\pi}{\alpha}$ és $z_0 = \dfrac{\mathrm{i}\,\pi}{2\alpha}$. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{C} \setminus \{z_0 + \mathrm{i}\,kb \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha z)}$$

   függvény mindenhol differenciálható.

2. Legyen $y \in \mathbb{R}$ és tekintsük az

$$f_y : \mathbb{C} \setminus \{z_0 + \mathrm{i}\,kb \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,yz} \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha z)}$$

   függvényt, melyről igazoljuk, hogy mindenhol differenciálható. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter és γ_1 a $-a$, a, $a + \mathrm{i}\,b$, $-a + \mathrm{i}\,b$, $-a$ pontsorozat által meghatározott egyenes szakaszokból álló törött vonal, továbbá legyen $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = z_0 + \dfrac{b}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$. Mutassuk meg, hogy $\displaystyle\oint_{\gamma_1} f_y = \oint_{\gamma_2} f_y$ teljesül.

3. Legyen

$$g : B_{\frac{b}{2}}(z_0) \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{\alpha z - \mathrm{i}\,yz} \cdot \dfrac{z - z_0}{\mathrm{e}^{2\alpha z} + 1}, & \text{ha} \quad z \neq z_0; \\ \dfrac{-\mathrm{i}}{\alpha} \exp\left(\dfrac{y\pi}{2\alpha}\right), & \text{ha} \quad z = z_0. \end{cases}$$

   A $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$ határérték segítségével mutassuk meg, hogy a g függvény folytonos az értelmezési tartományán és differenciálható a $B_{\frac{b}{2}}(z_0) \setminus \{z_0\}$ halmazon. A megszüntethető szingularitások tétele alapján igazoljuk, hogy g differenciálható a $B_{\frac{b}{2}}(z_0)$ halmazon.

4. A Cauchy-integrálformula alapján igazoljuk az

$$\int_{\gamma_2} f_y = \int_{\gamma_2} \frac{g(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}\, z = 2\pi \,\mathrm{i}\, g(z_0) = \frac{2\pi}{\alpha} \exp\left(\frac{\pi y}{2\alpha}\right)$$

egyenlőséget.

5. Tekintsük az alábbi görbéket.

$$\begin{aligned} &l_1 : [-a, a] \to \mathbb{C} && t \mapsto t \\ &l_2 : [0, b] \to \mathbb{C} && t \mapsto a + \mathrm{i}\, t \\ &l_3 : [-a, a] \to \mathbb{C} && t \mapsto -t + \mathrm{i}\, b \\ &l_4 : [0, b] \to \mathbb{C} && t \mapsto -a + \mathrm{i}\, b - \mathrm{i}\, t \end{aligned}$$

A $\oint_{\gamma_2} f_y$ intergált a $\oint_{\gamma_2} f_y = \sum_{k=1}^{4} \int_{l_k} f_y$ egyenlőség alapján számoljuk ki. Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned} &\int_{l_1} f_y + \int_{l_3} f_y = \left(1 + \mathrm{e}^{yb}\right) \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, yt} \frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha t)} \,\mathrm{d}\, t \\ &\left| \int_{l_2} f_y + \int_{l_4} f_y \right| \le \frac{4\,\mathrm{e}^{\alpha a}}{\mathrm{e}^{2\alpha a} - 1} \cdot \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül, ahol

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y \mapsto \begin{cases} \left| \dfrac{\mathrm{sh}(yb)}{y} \right|, & \text{ha} \quad y \ne 0; \\ b, & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases}$$

6. Igazoljuk, hogy

$$\oint_{\gamma_2} f_y = \left(1 + \mathrm{e}^{yb}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, yt} \frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha t)} \,\mathrm{d}\, t$$

teljesül.

7. Igazoljuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, yt} \frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha t)} \,\mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{yb}{2}\right)}$$

teljesül.

8. Igazoljuk, hogy a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} t\right)}$ függvényre minden $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, yt} h(t) \,\mathrm{d}\, t = h(y)$$

teljesül. (Amit úgy is kifejezhetünk, hogy a h függvény a *Fourier-transzformáció* sajátfüggvénye.)