

13. Laurent-sorfejtés

I. Határozzuk meg az $f(z)$ függvények z_0 pont körüli Laurent-sorfejtését minden lehetséges tartományon.

1. $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{z+1} \quad z_0 = i$
2. $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, i\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{(z+1)(z-i)} \quad z_0 = i$
3. $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto e^z + \frac{1}{z} \quad z_0 = 2$

II. Tekintsük az $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$ függvényt.

1. Írjuk fel a függvény $z_0 = -1$ pont körüli Laurent-sorát.
2. Vizsgáljuk meg a szingularitás jellegét és adjuk meg a függvény reziduumát a szinguláris pontban.
3. Számoljuk ki a $\oint_{\gamma_{-2,2}} f$ és a $\oint_{\gamma_{-5,1}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

III. Tekintsük az $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, 1\}, f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-1)^4}$ függvényt.

1. Hol és milyen szingularitása van f -nek?
2. Írjuk fel az f függvény $z_0 = 1$ bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adjuk meg a sor konvergencia gyűrűjét.
3. Számoljuk ki a $\operatorname{res}_{z=1} f(z)$ és a $\operatorname{res}_{z=-i} f(z)$ reziduumot.
4. Számoljuk ki a $\oint_{\gamma_{0,3}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

IV. Tekintsük az $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{\operatorname{sh}(z^2) - z^2}{4z^7}$ és $g(z) = \frac{\operatorname{ch}(z^3) - 1}{7z^9}$ függvényeket.

1. Írjuk fel az f és a g függvény $z_0 = 0$ bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adja meg a sor konvergencia gyűrűjét.
2. Hol és milyen szingularitása van az f illetve a g függvénynek? Adjuk meg a függvények szinguláris pontjaiban a reziduumát.
3. Számoljuk ki a $\oint_{\gamma_{0,2}} f$ és a $\oint_{\gamma_{3,2}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

V. Tekintsük az $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$ függvényt.

1. Írjuk fel az f függvény $z_0 = 2$ bázispontú azon Laurent-sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens. Adjuk meg a sor konvergenciagyűrűjét.
2. Számoljuk ki a $\operatorname{res}_{z=2} f(z)$ és a $\operatorname{res}_{z=0} f(z)$ reziduumot.