14. Reziduum-tétel

I. Tekintsük az $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\,\mathrm{i}, 2\,\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{(z+\mathrm{i})^2(z-2\,\mathrm{i})}$ függvényt.

1. Adjuk meg azokat a maximális konvergenciagyűrűket, melyeken az f függvény $z_0 = -2\,\mathrm{i}$ bázispontú konvergens Laurent sorba fejthető.
2. Ezen sorfejtések közül írjuk fel azt, amely a $z = 0$ pontban konvergens.
3. Számoljuk ki a $\operatorname*{res}_{z=-2\,\mathrm{i}} f(z)$ reziduumot és a $\displaystyle\oint_{\gamma_{-3\,\mathrm{i},4}} f$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

II. Reziduum.

1. Vizsgáljuk meg, hogy milyen szingularitása van a $z_0 = 0$ pontban az $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z - 1}{z^2}$, $g(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z - z}{z^6}$ függvényeknek.
2. Határozzuk meg az $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} f$ és az $\displaystyle\oint_{\gamma_{0,2}} g$ integrál értékét, ahol $\gamma_{c,r}$ jelöli a $c \in \mathbb{C}$ középpontú $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú körvonalat egyszeres pozitív körüljárással.

III. Reziduum.

1. Határozzuk meg a $D = \{z \in \mathbb{C} | \ \sin z + \mathrm{i} = 0\}$ halmaz elemeit.
2. Határozzuk meg a D halmaz pontjaiban az $f : \mathbb{C} \setminus D$, $f(z) = \dfrac{1}{\sin z + \mathrm{i}}$ függvény reziduumát.

IV. Legyen $c \in \mathbb{C}$ paraméter és tekintsük az $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{f(z) + cz}{z^4}$ függvényt.

1. Írjuk fel az f függvény $z_0 = 0$ bázispontú Laurent-sorfejtését.
2. Számoljuk ki a $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)$ reziduumot.
3. A c paraméter különböző értékei esetén milyen típusú szingularitása van az origóban az f függvénynek?