Analízis 3.

1. pótzárthelyi dolgozat

2014. 11. 13. 16.15-17.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$:

1. Adjon példát olyan X halmazra és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-gyűrűre, mely nem σ-algebra. *(8 p.)*

2.Legyen A a $[0,1]$ intervallum azon elemeinek a halmaza, melynek tizedestört alakjában előbb szerepel a 9-es számjegy mint a 7-es. *(8 p.)*

a) Mutassa meg, hogy az A halmaz Lebesgue-mérhető.

b) Határozza meg az A halmaz Lebesgue-mértékét.

3. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{2-2[x]}$ és $E = [0, \infty[$. *(11 p.)*

a) Mutassa meg, hogy az $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egészrész függvény mérhető.

b) Mutassa meg, hogy az f függvény mérhető.

c) Igazolja, hogy az f függvény integrálható az E halmazon, és számolja ki az $\int_E f \, \mathrm{d}\,\lambda$ integrál értékét, ahol λ jelöli a Lebesgue-mértéket.

4. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény és legyen $f : X \to \mathbb{R}$ is mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor konvergál mértékben az f függvényhez, ha az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden részsorozatának létezik olyan részsorozata, mely az f függvényhez konvergál majdnem mindenütt. *(10 p.)*

5. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen *(8 p.)*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-|x| + 2n + 2}{2n}, & \text{ha} \quad |x| \le 2; \\ 1, & \text{ha} \quad |x| > 2. \end{cases}$$

A mértékbeni konvergencia definíciója alapján mutassa meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat a Lebesgue-mérték szerint tart a konstans 1 függvényhez.

6. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen *(8 p.)*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-2x} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Számolja ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n f_n \, \mathrm{d}\,\lambda$ határértéket, ahol λ jelöli a Lebesgue-mértéket.

7. Legyen X nem üres halmaz, $H \subseteq \mathcal{P}(X)$ olyan halmazrendszer, melyre $\emptyset \in H$ teljesül és $\mu : H \to [0, \infty]$ olyan függvény, melyre $\mu(\emptyset) = 0$ teljesül. *(3×3 p.)*

a) Hogyan definiáljuk a $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ külső mértéket?

b) Mikor mondjuk egy $A \subseteq X$ halmazról, hogy μ-mérhető?

c) Jelölje $S(\mu)$ a μ-mérhető halmazok rendszerét. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az $S(\mu)$ halmazrendszer és a $\mu^*|_{S(\mu)}$ halmazfüggvény?