Analízis 3.
1. zárthelyi dolgozat
2014. 10. 14. 10.15-11.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$:

1. Adjon példát olyan X, Y halmazra és $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ σ-algebrára, melyre $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ nem σ-algebra az $X \cup Y$ halmaz felett. *(8 p.)*

2. Az $x \in \,]0,1[$ szám k-adik tizedesjegyét jelölje $n_k^{(x)}$. Az $f : \,]0,1[\, \to \{0,1,\dots,9\}$ függvényt definiáljuk az $f(x) = \max\left\{n_k^{(x)} \mid k \in \mathbb{N}^+\right\}$ képlettel. *(8 p.)*
   a) Igazolja, hogy az f függvény mérhető.
   b) Igazolja, hogy az f függvény majdnem mindenhol állandó.

3. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{2-[x]}$ és $E = [0,\infty[$. *(11 p.)*
   a) Mutassa meg, hogy az $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egészrész függvény mérhető.
   b) Mutassa meg, hogy az f függvény mérhető.
   c) Igazolja, hogy az f függvény integrálható az halmazon, és számolja ki az $\int_E f \,\mathrm{d}\,\lambda$ integrál értékét, ahol λ jelöli a Lebesgue-mértéket.

4. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér és $f : X \to \mathbb{R}_0^+$ mérhető függvény. Igazolja az alábbi ekvivalenciát. *(8 p.)*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\,\mu < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \mu\left([f \geq 2^n]\right) < \infty$$

5. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen *(8 p.)*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n+1-x^2}{n}, & \text{ha} \quad |x| \leq 1; \\ 1, & \text{ha} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

A mértékbeni konvergencia definíciója alapján mutassa meg, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat a Lebesgue-mérték szerint tart az $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ függvényhez, vagyis az irracionális számok karakterisztikus függvényéhez.

6. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen *(8 p.)*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{\pi + 2x^2 \operatorname{arctg}(nx)}{x^4\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right) + \sin\dfrac{1}{n}}.$$

Számolja ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n \,\mathrm{d}\,\lambda$ határértéket, ahol λ jelöli a Lebesgue-mértéket.

7. Tételek. *(3×3 p.)*
   a) Mondja ki a Beppo Levi tételt.
   b) Mondja ki a Lebesgue-féle dominált konvergencia tételt.
   c) Mondja ki a Fatou-lemmát.

1. Legyen $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{X}$ és $\mathcal{B} = \mathcal{Y}$. Ekkor $X \cup Y \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

2. a) Az x szám k-adik tizedesjegye $\left[10^k x\right] - 10^{k-1}\left[10^{k-1}x\right]$. Legyen $n_k :]0,1[\to \mathbb{R}$, $n_k(x) = \left[10^k x\right] - 10^{k-1}\left[10^{k-1}x\right]$. Mivel $[\cdot]$ mérhető (lásd 3/a), továbbá mérhető és folytonos függvények kompozíciója szintén mérhető, továbbá mérhető függvények számszorosa és összege is mérhető, ezért n_k mérhető. Legyen $m_k = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Mivel mérhető függvények maximuma mérhető, ezért m_k mérhető. Ekkor $f = \lim\limits_{k\to\infty} m_k$. Mivel mérhető függvények határértéke is mérhető, ezért f mérhető.

b) $f = 9$ mm pontban. Ugyanis azon számok mértéke melyek k-adik tizedesjegyéig szerepel a 9-es szám $\dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\left(\dfrac{9}{10}\right)^i$, tehát ahol a 9-es előfordul annak a mértéke $\dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\dfrac{9}{10}\right)^i = 1$. A mérték additivitása miatt ezért $\lambda\left([f \neq 9]\right) = 0$.

3. a) A $[\cdot]$ függvény pontosan akkor mérhető, ha minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a $\{x \in \mathbb{R} | \ [x] < c\}$ halmaz mérhető. Minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\{x \in \mathbb{R} | \ [x] < c\} =]-\infty, [c] + 1[$, ami intervallum, ezért mérhető halmaz.
b) Az $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\alpha(x) = 3^{2-x}$ függvény folytonos, $[\cdot]$ mérhető, és mivel folytonos és mérhető függvény kompozíciója mérhető ezért f mérhető.

c) Legyen $f_n = 0(\chi_{]-\infty,0[}) + \chi_{[n+1,\infty[} + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{9}{3^k}\chi_{[k,k+1[}$. Ekkor f_n mérhető, mert lépcsős függvény, és minden lépcsős függvény mérhető, továbbá $0 \le f_n \le f_{n+1}$, ezért Beppo Levi tétele alapján $\int\left(\lim\limits_{n\to\infty}(f_n\chi_E)\right)\mathrm{d}\,\lambda = \lim\limits_{n\to\infty}\int(f_n\chi_E)\,\mathrm{d}\,\lambda$. Mivel az E halmazon $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, ezért

$$\int(f\chi_E)\,\mathrm{d}\,\lambda = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{9}{3^k}\lambda\left([k,k+1[\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{9}{3^k} = \frac{27}{2} < \infty.$$

Tehát $f\chi_E$ integrálható, azaz f integrálható az E halmazon és $\int_E f\,\mathrm{d}\,\lambda = 12$.

4. Legyen $A_n = [f \ge 2^n]$. Ekkor $A_n \in \mathcal{A}$ és $A_{n+1} \subseteq A_n$.
Tegyük fel, hogy f integrálható. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $\eta = 0 \cdot \chi_{X\setminus A_k} + 2^k\chi_{A_k}$ mérhető függvényre $\eta \le f$ teljesül, vagyis η integrálható, valamint $\int \eta\,\mathrm{d}\,\mu = 2^k\mu(A_k) \le \int f\,\mathrm{d}\,\mu$ teljesül. Ezért $\limsup\limits_{k\to\infty}\left(2^k\mu(A_k)\right) \le \limsup\limits_{k\to\infty}\int f\,\mathrm{d}\,\mu = \int f\,\mathrm{d}\,\mu < \infty$. Legyen $\alpha = 0\cdot\chi_{X\setminus A_0} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n\chi_{A_n\setminus A_{n+1}}$. Az α függvény mérhető, továbbá $\alpha \le f$ teljesül, ezért α is integrálható.

$$\int\alpha\,\mathrm{d}\,\mu = \sum_{n=0}^{\infty}2^n(\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}2^n(\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) = \lim_{k\to\infty}\mu(A_0) + \sum_{n=1}^{k}2^{n-1}\mu(A_n) - 2^k\mu(A_{k+1}) \le \int f\,\mathrm{d}\,\mu < \infty$$

Mivel $0 \le \mu(A_0) < \infty$, ezért $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}2^{n-1}\mu(A_n) - 2^k\mu(A_{k+1}) < \int f\,\mathrm{d}\,\mu$ teljesül, amiből

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}2^{n-1}\mu(A_n) \le \int f\,\mathrm{d}\,\mu + \frac{1}{2}\limsup_{k\to\infty}\left(2^{k+1}\mu(A_{k+1})\right) \le \int f\,\mathrm{d}\,\mu + \frac{1}{2}\int f\,\mathrm{d}\,\mu < \infty$$

következik, vagyis $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\mu(A_n) < \infty$.

Ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\mu(A_n) < \infty$, akkor $\lim\limits_{k\to\infty}2^k\mu(A_k) = 0$. Legyen $\beta = 1\cdot\chi_{X\setminus A_0} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\chi_{A_n\setminus A_{n+1}}$. Ekkor a β függvény integrálható, ugyanis

$$\int\beta\,\mathrm{d}\,\mu = 1\cdot\mu(X) - 1\cdot\mu(A_0) + \sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}(\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) = \mu(X) - \mu(A_0) + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}2^{n+1}(\mu(A_n) - \mu(A_{n+1})) =$$
$$= \mu(X) - \mu(A_0) + \lim_{k\to\infty}2\mu(A_0) - 2^{k+1}\mu(A_{k+1}) + \sum_{n=1}^{k}2^n\mu(A_n) = \mu(X) + \mu(A_0) - \lim_{k\to\infty}2^{k+1}\mu(A_{k+1}) + \sum_{n=1}^{\infty}2^n\mu(A_n) =$$
$$= \mu(X) + \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty}2^n\mu(A_n) < \infty$$

Az f mérhető függvényre $f \le \beta$ teljesül, tehát az f függvény is integrálható.

5. Legyen $\varepsilon \in]0,1[$ tetszőleges. Ekkor $\left[\left|f_n - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right| \ge \varepsilon\right] = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{ha} \quad n > 1/\varepsilon; \\ \mathbb{Q} \cup \left[-\sqrt{1-n\varepsilon}, \sqrt{1-n\varepsilon}\right], & \text{ha} \quad n \le 1/\varepsilon. \end{cases}$
Vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda\left(\left[\left|f_n - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right| \ge \varepsilon\right]\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Ha $\varepsilon \ge 1$, akkor $\left[\left|f_n - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right| \ge \varepsilon\right] \subseteq \left[\left|f_n - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right| \ge \frac{1}{2}\right]$ amiből az előzőek alapján szintén $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda\left(\left[\left|f_n - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right| \ge \varepsilon\right]\right) = 0$ adódik.

6. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \dfrac{\pi + \pi x^2}{x^4}$ és $E = [1, \infty[$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén f_n folytonos, ezért mérhető továbbá az E halmazon $0 \le f_n \le g$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \dfrac{g}{2}$ teljesül.

Az $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2}\chi_E(x)$ és az $\beta(x) = \dfrac{1}{x^4}\chi_E(x)$ függvény mérhető, mert folytonos (tehát mérhető) és mérhető függvény szorzata, továbbá integrálható, mert az $\tilde{\alpha} = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus E} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}\chi_{[k,k+1[}$ lépcsős függvényre $\alpha, \beta \le \tilde{\alpha}$ teljesül, valamint $\int \tilde{\alpha} \,\mathrm{d}\,\lambda = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} < \infty$ teljesül, ezért a Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel alapján α és β integrálható. Integrálható függvények számszorosa és összege integrálható, ezért a g függvény integrálható az E halmazon. Mivel $\left|g\chi_E\right|$ integrálható, ezért integrálja megegyezik a Riemann-integrállal, ha Riemann-szerint is integrálható, azaz $\int_E g \,\mathrm{d}\,\lambda = \pi\left[\dfrac{x^{-3}}{-3} + \dfrac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{\infty} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ezért a Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \int (f_n\chi_E) \,\mathrm{d}\,\lambda = \int \lim\limits_{n\to\infty} (f_n\chi_E) \,\mathrm{d}\,\lambda = \int \dfrac{g}{2}\chi_E \,\mathrm{d}\,\lambda = \dfrac{4\pi}{3}$.

7. a) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : X \to \mathbb{R}_0^+$ olyan mérhető függvény, melyre $f_n \le f_{n+1}$ teljesül. Ekkor $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\,\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu$.

b) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, valamint legyen $f, g : X \to \mathbb{R}$. Ha μ-m.m. pontban $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ és $\left|f_n\right| \le g$ teljesül, valamint a g függvény integrálható, akkor $\int f \,\mathrm{d}\,\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu$.

c) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : X \to \mathbb{R}_0^+$ mérhető függvény. Ekkor $\int \liminf\limits_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\,\mu \le \liminf\limits_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\,\mu$.