Analízis 3.

2. pótzárthelyi dolgozat

2014. 12. 11. 16.15-17.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Legyen $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(1-x)\begin{cases} |x|^{-3}, & \text{ha} \quad |x| > 1; \\ 1, & \text{ha} \quad |x| \leq 1. \end{cases}$ és $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$, *(10 p.)*

ahol $\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad z < 0; \\ 0, & \text{ha} \quad z = 0; \\ 1, & \text{ha} \quad z > 0. \end{cases}$

a) Integrálható-e az $\mathbb{R}^2$ halmazon az f függvény a $\lambda \otimes \lambda$ szorzatmérték szerint?

b) Ha igen, akkor számolja ki $\int_{\mathbb{R}^2} f$ értékét.

2. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ és $g(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & \text{ha} \quad x \in \,]-\infty, -1]\,; \\ x, & \text{ha} \quad x \in \,]-1, 1[\,; \\ 2, & \text{ha} \quad x \in [1, \infty[\,. \end{cases}$ Számolja ki az *(10 p.)*

$\int_{-3}^{3} f \, \mathrm{d}\,\lambda_g(x)$ integrált.

3. Legyen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = x^3 + cxy^2 + \operatorname{sh}(x)\cos(y)$. *(3,5,3 p.)*

a) Határozza meg a c paraméter értékét úgy, hogy az u egy reguláris $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény valós része legyen, azaz amelyre $\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y) = u(x,y)$.

b) Adja meg azt a reguláris f függvényt, melyre $\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y) = u(x,y)$ és $f(0) = 0$ teljesül.

c) Határozza meg $f'(2\pi\, \mathrm{i})$ értékét!

4. Minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számra és $R \in \mathbb{R}^+$ paraméterre legyen *(3×4 p.)*

$$\gamma_{z_0,R} : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto z_0 + R\,\mathrm{e}^{2\pi t\,\mathrm{i}}\,.$$

Számolja ki az alábbi körintegrálokat!

a) $\oint_{\gamma_{0,1}} \mathrm{e}^{\sin z} \, \mathrm{d}\,z$

b) $\oint_{\gamma_{1+\mathrm{i},2}} \frac{\sin z}{z^2(z-1)(z+4)} \, \mathrm{d}\,z$

c) $\oint_{\gamma_{\mathrm{i},2}} \sum_{k=-5}^{5} \frac{\cos(z)}{z+k} \, \mathrm{d}\,z$

5. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ és γ a 2 pontból induló $1 + \mathrm{i}$ ponton áthaladó 0 pontban végződő *(8 p.)* félkörív. Számolja ki az $\oint_\gamma f$ integrál értékét.

6. Definíciók. Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény és $z_0 \in \mathbb{C}$. *(3×3 p.)*

a) Mit jelent, hogy az f függvény differenciálható a z_0 pontban.

b) Mit jelent, hogy az f függvény reguláris a z_0 pontban.

c) Ha $U \subseteq \operatorname{Dom} f$ nyílt csillaghalmaz és minden $T \subseteq \operatorname{Dom} f$ háromszögre $\int_{\partial T} f = 0$ teljesül, akkor mit mondhatunk az f primitívfüggvényéről?