

**Analízis 3.**  
**2. zárthelyi dolgozat**  
 2014. 12. 02. 10.15-11.45

Név:  
 Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ:

1. Legyen  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{\operatorname{sgn}(1-x)}{1+x^2} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(1-y)}{1+y^2}$ , ahol  $\operatorname{sgn}(z) = \begin{cases} -1, & \text{ha } z < 0; \\ 0, & \text{ha } z = 0; \\ 1, & \text{ha } z > 0. \end{cases}$  (10 p.)

a) Integrálható-e az  $\mathbb{R}^2$  halmazon az  $f$  függvény a  $\lambda \otimes \lambda$  szorzatmérték szerint?

b) Ha igen, akkor számolja ki  $\int_{\mathbb{R}^2} f$  értékét.

2. Legyen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 2x$  és  $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } x \in ]-\infty, -1]; \\ x^2, & \text{ha } x \in ]-1, 1[; \\ 5 - x, & \text{ha } x \in [1, \infty[. \end{cases}$  Számolja ki az (10 p.)

$\int_{-3}^3 f \, d\lambda_g(x)$  integrált.

3. Legyen  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x, y) = x^2 - cy^2 - \operatorname{ch}(x) \sin(y)$ . (3,5,3 p.)

a) Határozza meg a  $c$  paraméter értékét úgy, hogy az  $u$  egy reguláris  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény valós része legyen, azaz amelyre  $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y)$ .

b) Adja meg azt a reguláris  $f$  függvényt, melyre  $\operatorname{Re} f(x + iy) = u(x, y)$  és  $f(0) = 0$  teljesül.

c) Határozza meg  $f' \left(1 + i \frac{\pi}{2}\right)$  értékét!

4. Minden  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex számra és  $R \in \mathbb{R}^+$  paraméterre legyen (3×4 p.)

$$\gamma_{z_0, R} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto z_0 + R e^{2\pi t i}.$$

Számolja ki az alábbi körintegrálokat!

a)  $\oint_{\gamma_{0,1}} \frac{\cos(z^2)}{z(z-2)^3} \, dz$

b)  $\oint_{\gamma_{i,2}} \frac{z^2}{z(z^2+4)} \, dz$

c)  $\oint_{\gamma_{0,4}} z + 2 + \frac{3}{z} \, dz$

5. Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = (\bar{z})^2$  és  $\gamma$  az origó középpontú egység sugarú kör pozitív irányítással. (8 p.)

Számolja ki az  $\oint_{\gamma} f$  integrál értékét.

6. Tételek. (3×3 p.)

a) Mondja ki a Fubini-tételt.

b) Mondja ki a Goursat-lemmát.

c) Mondja ki a Liouville-tételt.