Vizsgatematika

Analízis 3, 2014/15 I. félév

A vizsga szóbeli, mindenki két tételt kap az alábbiakból; az elsőt részletesen kell ismertetni, a másodikból csak a definíciókat kell elmondani. A $*$ szimbólummal jelölt tételek bizonyítását nem kell ismerni.

1. Mértékelmélet alapfogalmai. Gyűrű, σ-gyűrű, σ-algebra, halmazok által generált gyűrű, σ-gyűrű és σ-algebra. Gyűrűn értelmezett mérték. Mértéktér. Véges, σ-véges, valószínűségi és teljes mérték. Mértéktér alaptulajdonságai, a mérték „folytonossága“.

2. Külső mértékek. Szubadditív halmazfüggvény. Carathéodory-féle külső mérték. A μ halmazfüggvényhez rendelt μ^* külső mérték. Mérhető halmaz fogalma a Carathéodory-féle külső mérték alapján. A μ^* külső mértékhez rendelt mérhető halmazok ($S(\mu^*)$) tulajdonságai, illetve a $\mu^*|_{S(\mu^*)}$ halmazfüggvény tulajdonságai.

3. Lebesgue-mérték. Az $\mathcal{R}$ halmazgyűrűn értelmezett μ mérték esetén a $\bar{\mu} = \mu^*|_{S(\mu^*)}$ halmazfüggvény tulajdonságai. A tégla fogalma az $\mathbb{R}^n$ térben. A téglák által generált gyűrű és a gyűrűn értelmezett „térfogat” tulajdonságai (bizonyítással az $n = 1$ esetben). Lebesgue-mérhető halmazok és a Lebesgue-mérték fogalma. Lebesgue-mérték viselkedése affin transzformáció ($a, b \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$) hatására.

4. Mérhető függvények. Metrikus tér Borel-halmazai. Mérhető terek között ható függvény mérhetősége. Adott $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér esetén az $X \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvények tulajdonságai. Mérhető függvények sorozatának mértékbeni konvergenciája.

5. Mérhető függvények sorozatára vonatkozó tételek. Mérhető függvények sorozatára vonatkozó, mértékbeni konvergenciát garantáló Lebesgue-tétel, Jegorov-tétel és Riesz-féle kiválasztási tétel.

6. Lépcsős függvények. Lépcsős függvény fogalma. Mérhető függvény lépcsős függvénnyel való approximálhatósága. Mérhető függvény integrálja, Csebisev-egyenlőtlenség. Beppo Levi tétele monoton növő mérhető függvénysorozat integráljáról.

7. Függvény integrálhatósága. Mérhető függvények integráljának linearitása. Fatou-lemma. Függvény pozitív és negatív része. Valós értékű függvény integrálhatósága. Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel.

8. Az integrál alaptulajdonságai. Mérhető részhalmazon való integrálás, illetve ennek σ-additivitása. Az integrál abszolút folytonossága. Paraméteres integrál folytonossága. Mértékek szorzatának konstrukciója. Fubini-tétel*.

9. Mérték topologikus tereken. Topologikus tér fogalma, kompakt és G_δ halmaz fogalma topologikus térben. Baire-féle σ-algebra. Lokális kompakt, és megszámlálható bázisú topologikus tér. Borel és Baire-halmazok kapcsolata lokálisan kompakt megszámlálható bázisú topologikus terekben*. Radon-mérték, mint $\mu : C_0(T, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ leképezés lokálisan kompakt tér felett. Az $m_\mu : \mathcal{B}_0(T) \to \mathbb{R}$ halmazfüggvény mint Radon-mérték. Riesz-féle mértékelméleti reprezentációs tétel Radon-mérékre*. A kétféle Radon-mérték fogalom „ekvivalenciája”*.

10. Előjeles mérték. A Lebesgue-mérték Radon-mérték. Approximációs lemma Radon-mérékre. Lebesgue–Stieltjes-mérték. Előjeles mérték. Előjeles mérték Hahn-felbontása.

Előjeles mérték pozitív és negatív része, Jordan-felbontás.

11. L^p-terek és abszolút folytonosság. A $\mathcal{L}^p$ és az L^p-tér fogalma. Riesz–Fischer-tétel az L^p-terekre*. Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség L^p-terekre*. Mértékek abszolút folytonossága és szingularitása. Radon–Nikodym-tétel*. Korlátos változású és abszolút folytonos függvény fogalma. Newton–Leibniz-tétel*.

12. Komplex függvény deriváltja. Komplex függvény differenciálhatósága és komplex függvény deriváltja. Cauchy–Riemann-egyenletek. Holomorf, reguláris és harmonikus függvény. Szakaszonként folytonosan differenciálható görbe és folytonos komplex függvény görbementi integrálja.

13. Indexfüggvény. Görbe indexfüggvénye. A körvonal indexfüggvénye. Az indexfüggvény tulajdonságai. Nyílt csillaghalmazon értelmezett folytonos függvény primitív függvényének létezésének szükséges és elégséges feltétele.

14. Primitív függvény. Goursat-lemma. Komplex függvény differenciálhatóságának és primitív függvényének létezésének a kapcsolata. Cauchy első integrálformulája.

15. Taylor-sorfejtés. Cauchy második (a deriváltakra vonatkozó) integrálformulája. Differenciálható függvény analitikussága és a Taylor-sorfejtés konvergenciasugarának maximalitási tulajdonsága. Cauchy-egyenlőtlenség.

16. Algebra alaptétele. Liouville-tétel és az algebra alaptétele. Megszüntethető szingularitások tétele. Differenciálható függvénysorozat határértékének tulajdonságai. Laurent-sorfejtés.