

Vizsgakövetelmény

Normált algebrák elemei

Alapfogalmak

1. Algebra, egységelemes algebra, standard egységelemesítés.
2. Ideál, reguláris ideál.
3. Spektrum.
4. Karakter, Gelfand-transzformáció, Gelfand-topológia a karaktertéren.
5. Normált algebra, Banach-algebra.
6. Spektrálsugár.
7. Az involúció.
8. $*$ -algebra, normált $*$ -algebra, Banach $*$ -algebra, pre- C^* -algebra, C^* -algebra.
9. Projektorok, valamint normális, önadjungált és pozitív elemek $*$ -algebrában.
10. A $\leq$ reláció az önadjungált elemek halmazán a $*$ -algebrában.
11. Unitér elemek egységelemes $*$ -algebrában.
12. C^* -algebra standard egységelemesítése.
13. $*$ -algebra ábrázolása; nemelfajult, ciklikus, hű, algebrailag irreducibilis, geometriailag irreducibilis ábrázolása, illetve nullábrázolása.
14. $*$ -algebrán értelmezett funkcionál; pozitív, önadjungált, reguláris funkcionál.

Alaptételek

1. Algebra egységelemesítésének unvierzalitása.
2. Jacobson-lemma.
3. Gelfand–Mazur-tétel.
4. A spektrum tulajdonságai egységelemes Banach-algebrában.
5. Lokálisan kompakt téren értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos végtelenben eltűnő függvények C^* -algebrájának szerkezete. (Zárt ideáljai, reguláris ideáljai, és karakteretere.)
6. A C^* -norma egyértelműsége.
7. Gelfand–Naimark-tétel.
8. A folytonos függvényszámítás tétele.
9. Pozitív elemek jellemzése egységelemes C^* -algebrában.
10. A Gelfand–Naimark–Segal-konstrukció.

Az alaptételek

Forrás: **Kristóf János: A matematikai analízis elemei IV**

1. Algebra egységelemesítésének univerzalitása.

Legyen A algebra a K test felett.

- Létezik olyan B egységelemes algebra K felett, és olyan $j : A \rightarrow B$ algebra-morfizmus, amelyre teljesül az, hogy minden C egységelemes algebrához, és minden $\pi : A \rightarrow C$ algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi} : B \rightarrow C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi} \circ j = \pi$.
- Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan párok, hogy B_1 és B_2 egységelemes algebrák a K test felett, $j_1 : A \rightarrow B_1$ és $j_2 : A \rightarrow B_2$ algebra-morfizmusok, és minden C egységelemes algebrához, valamint minden $\pi_1 : A \rightarrow C$ és $\pi_2 : A \rightarrow C$ algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi}_1 : B_1 \rightarrow C$ és $\tilde{\pi}_2 : B_2 \rightarrow C$ egységelem-tartó algebra-morfizmusok, hogy $\tilde{\pi}_1 \circ j_1 = \pi_1$ és $\tilde{\pi}_2 \circ j_2 = \pi_2$. Ekkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \rightarrow B_2$ algebra-morfizmus, amelyre $\pi \circ j_1 = j_2$, és ez a leképezés algebra-izomorfizmus.

2. Jacobson-lemma.

- Ha A egységelemes algebra, akkor $a, b \in A$ esetén $\{0\} \cup Sp_A(ab) = \{0\} \cup Sp_A(ba)$.
- Ha A algebra a K test felett, akkor $a, b \in A$ esetén $Sp'_A(ab) = Sp'_A(ba)$.

3. Gelfand–Mazur-tétel.

Ha A olyan egységelemes komplex normált algebra, amelyben minden nem nulla elem invertálható, akkor $A = \mathbb{C} \cdot 1$.

4. A spektrum tulajdonságai egységelemes Banach-algebrában.

Legyen A egységelemes Banach-algebra $\mathbb{K}$ -felett és $a \in A$.

- Az $Sp_A(a)$ halmaz kompakt $\mathbb{K}$ -ban és $Sp_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0; \mathbb{K})$. Továbbá, az a elem rezolvens-függvénye végtelenben eltűnő és $\mathbb{K}$ -analitikus.
- Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}^+ \mid Sp_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0; \mathbb{C})\}$ (ez a spektrálsugár *minimalitási tulajdonsága*), és ha $A \neq \{0\}$, akkor $Sp_A(a) \neq \emptyset$.

5. Lokálisan kompakt téren értelmezett $\mathbb{K}$ értékű folytonos végtelenben eltűnő függvények C^* -algebrájának szerkezete.

Legyen T lokálisan kompakt tér és $A = \overline{C_0}(T; \mathbb{K})$. Minden $F \subseteq T$ esetén legyen

$$\mathfrak{m}_F = \{a \in A \mid F \subseteq [a = 0]\}.$$

- Ha F_1 és F_2 zárt halmazok T -ben, akkor $F_1 \subseteq F_2$ ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{m}_{F_2} \subseteq \mathfrak{m}_{F_1}$.
- Minden $F \subseteq T$ zárt halmazra $\mathfrak{m}_F$ zárt ideál az A Banach-algebrában, és az $F \mapsto \mathfrak{m}_F$ hozzárendelés bijekció a T zárt részhalmazainak halmaza és az A zárt ideáljainak halmaza között.
- Ha $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor az $\mathfrak{m}_F$ ideál pontosan akkor reguláris, ha F kompakt és nem üres.
- Minden $t \in T$ esetén értelmezzük az $\varepsilon_t : A \rightarrow \mathbb{K}; a \mapsto a(t)$ függvényt. Ekkor $t \in T$ esetén ε_t nem nulla karaktere A -nak, és az

$$\varepsilon_T : T \rightarrow X(A) \quad t \mapsto \varepsilon_t$$

függvény homeomorfizmus a T lokálisan kompakt tér és az $X(A)$ karaktertér között.

- Vezessük be az

$$\varepsilon_T^\# : \overline{C_0}(X(A); \mathbb{K}) \rightarrow \overline{C_0}(T; \mathbb{K}) \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \varepsilon_T$$

leképezést. Ekkor $\varepsilon_T^\#$ izometrikus algebra-izomorfizmus, és $\mathcal{G}_A = (\varepsilon_T^\#)^{-1}$ teljesül.

6. A C^* -norma egyértelműsége.

Ha A $*$ -algebra, akkor legfeljebb egy olyan norma létezik A felett, amellyel A C^* -algebra.

7. Gelfand–Naimark-tétel.

- (Első Gelfand–Naimark-tétel.) Ha A kommutatív C^* -algebra, akkor a

$$\mathcal{G}_A : A \rightarrow \overline{C_0}(X(A); \mathbb{C})$$

Gelfand-reprezentáció $*$ -izomorfizmus.

- (Második Gelfand–Naimark tétel.) Minden C^* -algebrának létezik hű ábrázolása, mely izometria.

8. A folytonos függvényszámítás tétele.

Legyen A egységelemes C^* -algebra és $a \in A$ normális elem. Ekkor létezik egyetlen olyan

$$C_a : C(Sp_A(a); \mathbb{C}) \rightarrow A$$

egységelem-tartó $*$ -algebra-morfizmus, amelyre $C_a(id_{Sp_A(a)}) = a$. A C_a leképezés izometria és $Im(C_a)$ megegyezik az $\{a, 1\}$ halmaz által generált zárt $*$ -részalgebrával.

9. *Pozitív elemek jellemzése egységelemes C^* -algebrában.*

Legyen A egységelemes C^* -algebra és $x \in A$ önadjungált elem. A következő állítások ekvivalensek.

- $Sp_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, vagyis az x elem *pozitív spektrum*.
- Létezik olyan $y \in A$ önadjungált elem, amelyre $x = y^2$.
- Létezik olyan $a \in A$, amelyre $x = a^*a$.
- $x \in A_+$, vagyis az x elem *pozitív*.

Továbbá, az A_+ halmaz zárt a C^* -norma szerint, és $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ teljesül.

10. *A Gelfand–Naimark–Segal-konstrukció.*

Ha A Banach $*$ -algebra és $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ pozitív reguláris funkcionál, akkor létezik olyan H_f Hilbert-tér, $\pi_f : A \rightarrow \mathcal{L}(H_f)$ ciklikus $*$ -ábrázolása az A algebrának és $x_f \in H_f$ ciklikus vektor, hogy minden $a \in A$ esetén

$$f(a) = \langle x_f, \pi_f(a)x_f \rangle$$

teljesül.