

$$\varepsilon : \overline{C}_0(X(\overline{C}_0(T, \mathbb{C})), \mathbb{C}) \rightarrow \overline{C}_0(T, \mathbb{C})$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ \varepsilon_T$$

$$\{0\} \cup \text{Sp}(ab) = \{0\} \cup \text{Sp}(ba)$$

C*-algebrák
és a

nemkommutatív geometria alapjai

A **Normált algebrák elemei** (BMETE92MM10) kurzuson kiderül, hogy pontosan mit jelent a nemkommutatív geometria kifejezés, és hogyan általánosítható a mértékelmélet vagy a valószínűségszámítás ezekre a terekre.

$$a^*b + b^*a \preceq a^*a + b^*b$$

Az elmúlt évtizedekben a matematika külön tudományterületévé vált a nemkommutatív terek elmélete. Egyik klasszikus eredménye az első Gelfand–Najmark tétel, melynek elvi jelentősége az, hogy a matematika két (függetlennek tűnő) területéről mutatja meg, hogy igazából egy struktúra kétféle leírásáról van szó, mint ahogy ez az alábbi (nem teljes) „szótárból” kiderül.

Topologikus terek:	Normált algebrák:
lokálisan kompakt Hausdorff-tér	kommutatív C*-algebra
kompakt tér	egységelemes kommutatív C*-algebra
egy pontú kompaktifikáció	egységelemesítés
homeomorfizmus	izomorfizmus
zárt halmaz	zárt ideál
pont	maximális ideál
mérték	pozitív funkcionál

$$B_a := C^*(\{a, 1\})$$

$$G_A : A \rightarrow \overline{C}_0(X(A), \mathbb{C}) \quad a \mapsto (\chi \mapsto \chi(a))$$

A geometriai fogalmak, konstrukciók és tételek a fenti táblázat alapján lefordíthatók a kommutatív C*-algebrák nyelvére. A legtöbb esetben ezeken a fordításokról kiderül, hogy sehol sem használják ki az algebra kommutatív mivoltát és tetszőleges C*-algebrára is általánosíthatók. Ezért lehet jogosan a C*-algebrára, mint nemkommutatív geometriai struktúrára gondolni.

$$(G_{B(a)})^\# : C(\text{Sp}_{B(a)}, \mathbb{C}) \rightarrow C(X(B), \mathbb{C}) \quad \varphi \mapsto \varphi \circ G_{B(a)}$$

A C*-algebrák elmélete elengedhetetlen még a

- lokálisan kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásaihoz;
- a kvantummechanika által használt *nemkommutatív valószínűségszámításhoz*;
- az utóbbi évtizedekben divatossá vált *szabad valószínűségszámításhoz*;
- a fizikai rendszerek által produkált *spontán szimmetriasértés* megértéséhez;
- az AQFT (*Algebraic Quantum Field Theory*) megértéséhez.

Vázlatos tematika:

- Normált-, Banach- és C*-algebrák alapjai.
- Elemi spektruma és a spektrum főbb tulajdonságai.
- Karaktertér és az első Gelfand–Najmark-tétel.
- Pontok, mint maximális ideálok.
- Pontok, mint irreducibilis ábrázolások magjai.
- Egy hasznos alkalmazás: Cech–Stone-kompaktifikáció.
- Folytonos függvényszámítás C*-algebrán.
- A C*-norma egyértelműsége.
- Pozitív elemek jellemzése.
- A GNS konstrukció és alkalmazásai.
- Állapotok algebrákon és az algebrák ábrázolásai.
- Algebra spektruma: primitív spektrum és struktúratér.



A felmerülő kérdéseket az andaia@math.bme.hu címre lehet megírni.

$$f_{\pi, \xi}(a) := \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \implies \left[|f(b^*a)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b) \quad \wedge \quad f(b^*a) = f(\bar{a}^*b) \right]$$