

Vektorterek a fizikában (BMETE92AM24)

Az órát bátran felvehetik matematikus, fizikus és mérnök szakos BSC hallgatók is, ugyanis nem igényel előismeretet fizikából és a Matematika A1, A2 elég a tárgy elkezdéséhez.

$$\alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha$$

$$d\delta * = * \delta d$$

A vázlatos tematika:

- Vektortér bázisa és dimenziója.
- Vektortér duálisa.
- Lineáris és multilineáris leképezések tere.
- Tenzorszorzat, fedőalgebra.
- Külső formák és külső algebra.
- Hodge-operátor és tulajdonságai.
- Riemann-sokaság fogalma.
- Külső deriválás és koderiválás.
- Sokaságokon való számolás alapjainak ismertetése;
- Gauss–Leibniz–Newton–Osztrogradszkij–Stokes-tétel.



$$\Delta = \delta d + d\delta = (d + \delta)^2$$

$$F = dA$$

Az alábbi alkalmazások is bemutatásra kerülnek.

1. A klasszikus (differenciális) Maxwell-egyenleteket ha közelebbről megvizsgáljuk láthatjuk, hogy külön szerepel bennük az idő- illetve a térkoordináták szerinti deriválás. Ez egyrészt az egységes téridő fogalmával bizonyos szempontból ellentétes, másrészt a téridőben nem látunk kitüntetett x , y , z és t tengelyeket, így ezek olyan adalékok az egyenletben, melyeket mi teszünk bele. Ezért megnézzük hogyan lehet felírni a Maxwell-egyenleteket koordinátamentes módon. Miután ezt megtettük, az eredmény könnyen általánosítható lesz tetszőleges (görbült) téridőkre. Ehhez azonban meg kell ismerkedünk előbb pár matematikai konstrukcióval és fogalommal, mint például a külső deriválással, Hodge-féle $\star$ -operációval vagy a koderiválással.

$$**\alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha$$

2. A fizikában fontos szerepet kap a vektoriális szorzás, például a mágneses erőterben mozgó töltésre ható erőt is ennek a segítségével tudjuk kiszámolni: $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. A középiskolás jobbkéz szabály azonban matematikailag kissé problematikus, hiszen az $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{B}$ mennyiségek különböző vektorterekben laknak (hiszen összeadni nem tudjuk ezeket a mennyiségeket); vagyis a jobbkéz három ujja három különböző vektortérben jelöl ki irányt, mely terek között azonban nincs természetes izomorfizmus!

$$\int_V \langle df, dp \rangle = \int_{\partial V} \langle f, p \rangle$$

3. Az integráltételek különböző formái más-más néven kerülnek bevezetésre:

- a háromdimenziós tér háromdimenziós tartományáról a Gauss–Osztrogradszkij-tétel szól;
- a kettő- illetve háromdimenziós tér kétdimenziós tartományára a Stokes-tétel vonatkozik;
- az n dimenziós tér egydimenziós tartományárát a Newton–Leibniz-formula írja le.

A félév folyamán tárgyaljuk az n dimenziós tér k dimenziós tartományára ($n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \geq k$) vonatkozó általános Gauss–Leibniz–Newton–Osztrogradszkij–Stokes-tételt.

$$\alpha \in \Lambda^p(V) \wedge \beta \in \Lambda^q(V) \implies d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$$

Felmerülő kérdéseket az andaia@math.bme.hu címre lehet megírni.

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow[\text{grad}]{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow[\text{rot}]{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow[\text{div}]{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

$$dF = 0 \quad d*F = 4\pi *J$$