

Kalkulus 1, 1 hét

Halmazelmélet

I. Legyen A , B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
2. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
3. $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$
4. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

II. Legyen A , B és C tetszőleges halmaz. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat.

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3. $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \times (B \setminus D)) \cup ((A \setminus C) \times (B \cap D)) \cup (C \times D)$

III. Legyen A , B és C halmaz. Az alább definiálandó X és Y halmazra teljesül-e az $X \subseteq Y$ vagy az $Y \subseteq X$ tartalmazás?

1. $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
2. $X = A \setminus C$, $Y = (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$
3. $X = A \setminus (B \setminus C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C)$

IV. Bizonyítsuk a halmazrendszerekre vonatkozó alábbi összefüggéseket.

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \cap B_j)$
2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j)$
3. $A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i)$

Teljes indukció

I. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket.

1. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
5. $\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

6. Legyen $a_1, d \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 + (n-1)d$ képlettel megadott számtani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

teljesül.

7. Legyen $a_1, q \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $a_n = a_1 q^{n-1}$ képlettel megadott mértani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, & \text{ha } q \neq 1; \\ na_1, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$

II. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. Ha $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ akkor

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}.$$

2. Minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 2$.