

Kalkulus 1, Haladó feladatok, 1 hét

I. Legyen X halmaz és $p : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$ szimmetrikus függvény. (Vagyis minden $a, b \in X$ esetén $p(a, b) = p(b, a)$.) Minden $A \subseteq X$ részhalmaz esetén legyen $A' = \{x \in X \mid \forall a \in A : p(x, a) = 1\}$.

1. Mutassuk meg, hogy minden $A, B \subseteq X$ esetén, ha $A \subseteq B$, akkor $B' \subseteq A'$.
2. Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq X$ esetén $A \subseteq A''$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $A \subseteq X$ esetén $A' = A'''$.

II. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen A_n halmaz.

1. Mutassuk meg, hogy a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek legfeljebb véges számú kivétellel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.
2. Mutassuk meg, hogy a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ halmaznak pontosan azok az elemei, amelyek végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén az A_n halmazhoz tartoznak.

III. Legyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mutassuk meg, hogy egy n elemű halmazon

1. a relációk száma $2^{(n^2)}$;
2. a reflexív relációk száma $2^{n(n-1)}$;
3. a szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
4. az antiszimmetrikus relációk száma $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
5. a reflexív és szimmetrikus relációk száma $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
6. a reflexív és antiszimmetrikus relációk száma $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
7. a szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 2^n ;
8. a reflexív, szimmetrikus és antiszimmetrikus relációk száma 1;
9. a reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációk száma E_n , ahol az E_n sorozatot a $E_0 = 1$, $E_1 = 1$ kezdeti értékekkel és $n \geq 2$ esetén a

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} E_k$$

rekurzióval definiálhatjuk;

10. a szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 2^n ;
11. a reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus és tranzitív relációk száma 1.

IV. Legyen $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ olyan bijekció, melyre minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén $f(x+y) = f(x) + f(y)$ és $f(xy) = f(x)f(y)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{Q}$ számra $f(x) = x$.

V. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan bijekció, melyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+y) = f(x) + f(y)$ és $f(xy) = f(x)f(y)$ teljesül. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f(x) = x$.

VI. Legyen $n, m \in \mathbb{N}^+$, $E = \{1, \dots, n\}$ és $F = \{1, \dots, m\}$. Igazoljuk az alábbiakat.

1. Az $f : E \rightarrow F$ bijekciók száma 0, ha $m \neq n$, illetve $n!$, ha $n = m$.
2. Az $f : E \rightarrow F$ injekciók száma 0, ha $n > m$, illetve $\frac{m!}{(m-n)!}$, ha $n \leq m$.

3*. Az $f : E \rightarrow F$ szürjekciók száma $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$.

VII. Legyen A azon valós számok halmaza, melyek előállnak egész együtthatós polinomok gyökeként. Igazoljuk, hogy $|A| = |\mathbb{N}|$ teljesül.