

Kalkulus 1, 2 hét

Valós számok elemi tulajdonságai

I. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Mutassuk meg, hogy létezik $\inf A$, és $\inf A = -(\sup(-A))$ teljesül.

II. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A \cup B$ is felülről korlátos, valamint $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ teljesül.

III. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $A + B$ is felülről korlátos, valamint $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$ teljesül.

IV. Legyen $A, B \subseteq \mathbb{R}_0^+$ felülről korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy AB is felülről korlátos, valamint $(\sup A)(\sup B) = \sup(AB)$ teljesül.

V. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ számra

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

teljesül.

VI. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén teljesülnek az alábbiak.

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n & 2. \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \\ 3. \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 & 4. \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \end{array}$$

Egyenlőtlenségek

I. Igazoljuk, hogy $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ számokra teljesülnek az alábbiak.

1. $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$
2. $6 \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$
3. $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$
4. $8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$
5. $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq abc$
6. $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$
7. Ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, akkor $a + 2b + 3c + 4d \leq \sqrt{30}$.