

Kalkulus 1, Haladó feladatok, 2. hét

Egyenlőtlenségek

I. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ olyan, melyre $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor

$$2^n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

II. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

III. Mutassuk meg, hogy mindenn $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$n^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

IV. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$a + b + c + d \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a}.$$

V. Mutassuk meg, hogy ha az $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számokra $abc = 1$ teljesül, akkor

$$a + b + c \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

VI. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ esetén ha $a + b + c + d = 4$, akkor

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \leq \frac{4}{abcd}.$$

VII. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\frac{a^2 b + b^2 c + c^2 a}{3} \leq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

VIII. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$4 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3\sqrt[3]{abc}}{a + b + c}.$$

IX. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ számra

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}.$$