

Kalkulus 1, 3. hét

Valós számok elemi topológiája

I. Határozzuk meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait a valós számtest felett; döntsük el, hogy rendelkeznek-e a nyíltság, zártság, korlátosság, kompaktság tulajdonságokkal; valamint adjuk meg a lezártjukat és a belsejüket.

1. $A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
2. $A_2 = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
3. $A_3 =]-2, -1[\cup [2, 3] \cup [4, \infty[$

II. Igazoljuk, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\overline{\{z \in \mathbb{R} \mid |x - z| < r\}} = \{z \in \mathbb{R} \mid |x - z| \leq r\}$$

teljesül.

III. Adjunk példát olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra, melyre $\text{Int } \overline{A} = \mathbb{R}$ és $\overline{\text{Int } A} = \emptyset$ teljesül.

IV. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Igazoljuk, hogy ekkor fennállnak az alábbi egyenlőségek.

$$\text{Int } A = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus A} \qquad \overline{A} = \mathbb{R} \setminus \text{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$$

V. Adjunk példát olyan $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazrendszerre, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, korlátos halmaz, $A_{n+1} \subseteq A_n$ teljesül, valamint $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Sorozatok definíció szerinti konvergenciája

I. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $K = 100$ korláthoz.

1. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
2. $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 5$
3. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 - 5n^3}$

II. Mutassuk meg az alábbi határértékeket a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $\varepsilon = 10^{-3}$ korláthoz.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n - 3}{2n + 1} = 4$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n - 5}{n^2 + 2n + 2} = 3$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{n} + \sin n}{n + 2} = 2$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n} - n = 1$

Speciális sorozatok konvergenciája I.

I. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$	2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 6}{3n^2 - 1}$	3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$	5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 3\sqrt{n} - 9)$	6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n - 2}{5n^3 + 2n^2 + n + 1}$

II. Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 - n})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 3} - \sqrt{n^2 + an + 1}) \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^6 + n^5} - \sqrt[3]{n^6 - n^5})$

III. Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

- $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}, a_1 = 4$
- $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}, a_1 = 1$ és $a_1 = 5$
- $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = 1$

IV. Legyen $a_0, a_1 = 1$, és minden $n \in \mathbb{N} \setminus 2$ esetén legyen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

teljesül.

2. Igazoljuk, hogy a

$$b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad n \mapsto \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

sorozat olyan Cauchy-sorozat, mely nem konvergens a $\mathbb{Q}$ számtestben.