

Kalkulus 1, Haladó feladatok, 3. hét

Valós számok elemi topológiája

I. Jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát. Használjuk fel azt a számelméleti tételt, mely szerint minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számhoz egyértelműen létezik olyan egész értékű $(\mu_p(x))_{x \in \mathbb{P}}$ sorozat és olyan $e \in \{-1, 1\}$ elem, hogy a $\{p \in \mathbb{P} \mid \mu_p(x) \neq 0\}$ halmaz véges, és

$$x = e \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\mu_p(x)}$$

teljesül. Legyen $p \in \mathbb{N}$ tetszőleges prímszám, és definiáljuk az

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} p^{-\mu_p(x)}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Igazoljuk, hogy $|\cdot|_p$ abszolútérték, azaz olyan függvény melyre teljesülnek az alábbiak.

- i. $\forall x \in \mathbb{Q} : (|x|_p = 0 \leftrightarrow x = 0)$
- ii. $\forall x, y \in \mathbb{Q} : |xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$
- iii. $\forall x, y \in \mathbb{Q} : |x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

II. Mutassuk meg, hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, mely zárt és nyílt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = \mathbb{R}$ teljesül.

III. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazról azt mondjuk, hogy *sehol sem sűrű*, ha $\text{Int } \overline{A} = \emptyset$. Igazoljuk, hogy

1. az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ halmaz sűrű;
2. véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.

IV. Legyen G zárt, valódi részcsoportja az $(\mathbb{R}, +, 0)$ csoportnak. Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre $G = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Speciális sorozatok konvergenciája I.

I. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \leq a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

II. Igazoljuk a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n \right\} = 1$ határértéket, ahol $\{\cdot\}$ a törtrész függvényt jelöli!

III. Igazoljuk az alábbi határértékeket.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$