Kalkulus 1, 4. hét

Speciális sorozatok konvergenciája II.

I. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+100}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-100}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3-2n+3}{n\sqrt{n}+8}}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2 5^n}{9n^3+10^n}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n n^2+1}{10^n n^3+\sqrt{n}}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{4^n}}{\frac{n^2}{5^n}}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2014^n n+2015^n}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+2^n}{n+3^n}}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n n+n^2}{2^n n+\sqrt{n}}}$
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+4^n}{5^n+3^n n^2}}$
18. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 3^n+n^3 4^n}{n^4 5^n}}$

II. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^n = \sqrt[5]{\mathrm{e}}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^n = 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = 0$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+7n+1}{2n^2+3n+2}\right)^n = \mathrm{e}^2$

III. Határozzuk meg a következő a sorozatok esetén $\limsup a$ és $\liminf a$ értékét!

1. $a_n = \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)\frac{2n^2-3}{n^2+n+8}$
2. $a_n = \frac{4-n^2}{n+3}$
3. $a_n = \sqrt{\frac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+8}}$
4. $a_n = \left(\frac{3-n}{5+n}\right)\left(\frac{4n-1}{2n+5}\right)^3$

IV. Mutassuk meg, hogy minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra teljesülnek az alábbiak.

1. Az $x \in \mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\limsup a = x$, ha minden $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c < a_n\}$ halmaz végtelen, és minden $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c < a_n\}$ halmaz véges.
2. Az $x \in \mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\liminf a = x$, ha minden $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c > a_n\}$ halmaz véges, és minden $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c > a_n\}$ halmaz végtelen.