

Kalkulus 1, Haladó feladatok, 4. hét

Speciális sorozatok konvergenciája II.

I. Igazoljuk következő határértékeket!

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)^{2n+1} = e^{10}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = 1$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} n(n(\sqrt[n]{e} - 1) - 1) = \frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2n} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2\right)^n = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{10}{3}} \left(\sqrt[3]{n^8 + 6n^2} - \sqrt[3]{n^8 - 1}\right) = 2$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{n^2 + 6n + 3} - \sqrt[6]{n^4 + 12n^3 + 2}\right) = 7$$

II. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket minden $k \in \mathbb{N}^+$ paraméterre.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^n i^k\right) = \frac{1}{k+1} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^n i^k - \frac{n}{k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

III. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^k p_i^n} = \max\{p_1, \dots, p_k\}.$$

IV. Legyen $a_1, d > 0$ és tekintsük az $a_n = a_1 + (n-1)d$ számtani sorozatot. Mutassuk meg, hogy a sorozat elemeinek geometria és számtani közepének a hányadosára az alábbi teljesül.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}{a_1 + \cdots + a_n} = \frac{2}{e}$$

V. Legyen $0 < x_0 \leq y_0$ tetszőleges valós számpár. Defináljuk az $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ rekurzióval az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy ezek konvergens sorozatok és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

VI. Legyen $x_0, c \in \mathbb{R}^+$. Adjuk meg az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot az alábbi iterációval.

$$x_{k+1} = \frac{2}{3}x_k + \frac{1}{3}\frac{c}{x_k^2}$$

Igazoljuk, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sqrt[3]{c}.$$

VII. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \leq a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

VIII. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = \operatorname{tg} n$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy minden $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozathoz, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik az a sorzatnak olyan $n \mapsto a_{\sigma(n)}$ részsorozata, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_{\sigma(n)} - b_n| < \varepsilon$ teljesül.