

Kalkulus 1, 5. hét

Elemi sorösszegek és geometriai sorok

I. Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1 & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 3 & 3. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3-n} = 1 \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = 1 & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1 \\ 7. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg n - \arctg(n+1) = -\frac{\pi}{4} & 8. \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\log 2 & 9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{4} \end{array}$$

II. Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} & 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{2n}i} \\ 4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{4^n(1-i)^{2n}} & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n + 5(-1)^n}{3^{2n}} \end{array}$$

Majoráns, minorán, gyök- és hányadoskritérium

I. A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntjük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2} & 2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-8n^2+1} & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^4+2n^2+7} \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7} & 5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-1}\right) \\ 7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n} & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \end{array}$$

II. A gyökkritérium segítségével döntjük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}} & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n} \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} & 5. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{9^n} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
7. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^{n^2} & 8. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2} \right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}} & 9. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1} \right)^{n^3} \\
10. & \sum_{n=4}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} & 11. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{3n^2} & 12. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log^n n}
\end{array}$$

III. A hányadoskritérium segítségével döntsek el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergenssek illetve melyek divergenssek.

$$\begin{array}{lll}
1. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} & 2. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & 3. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} \\
4. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n-1)!} & 5. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^n}{(n+1)!} & 6. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} n! (n+1)! (n+2)!}
\end{array}$$

IV. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$ esetén

$$\begin{array}{l}
1. \quad \sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \frac{x^n}{x-1}n - \frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}, \text{ valamint } \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(x-1)^2}; \\
2. \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^2x^k = \frac{x^n}{x-1}n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2}n + \frac{x(1+x)(x^n-1)}{(x-1)^3}, \text{ valamint } \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}.
\end{array}$$