

Kalkulus 1, Haladó feladatok, 5. hét

I. Igazoljuk az alábbi végtelen szorzatokra vonatkozó egyenlőségeket.

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \infty & 2. \quad \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 0 & 3. \quad \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right) = 1 \\ 4. \quad \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2 - 1}\right) = 2 & 5. \quad \prod_{k=3}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{k^2}\right) = \frac{1}{6} & 6. \quad \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k^2 + k}\right) = \frac{1}{3} \end{array}$$

Speciális sorok konvergenciája I.

I. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim a$.

II. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan monoton csökkenő zérussorozat, melyre $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

III. Legyen $a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ olyan sorozat, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k = 0$.

IV. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású sorozat, azaz $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor az a sorozat konvergens.

V. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Mutassuk meg, hogy ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

VI. Legyen $x \in \mathbb{C}$ $|x| < 1$, és tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $a_k = x^k$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{array}{l} 1. \quad \sum_{k=0}^{n-1} k x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1} n - \frac{x(x^n - 1)}{(x-1)^2}, \text{ valamint } \sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(x-1)^2}; \\ 2. \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^2 x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1} n^2 - \frac{2x^{n+1}}{(x-1)^2} n + \frac{x(1+x)(x^n - 1)}{(x-1)^3}, \text{ valamint } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}; \\ 3. \quad \sum_{k=0}^{n-1} k^3 x^k = \frac{x^{n+1}}{x-1} n^3 - \frac{3x^{n+1}}{(x-1)^2} n^2 + \frac{3x^{n+1}(x+1)}{(x+1)^3} n - \frac{x(x^2 + 4x + 1)(x^n - 1)}{(x-1)^4}, \text{ valamint} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2 + 4x + 1)}{(1-x)^4} \end{array}$$

teljesül.