

Kalkulus 1, 6. hét

Leibniz-, abszolút és feltételesen konvergens sorok

I. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergenssek, abszolút konvergenssek illetve feltételesen konvergenssek-e.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} & 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1} & 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \sqrt{n}} \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & 5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right) & 6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n} \end{array}$$

II. Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4} -nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{5^{2n} + 3n^2 + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n + 3}$$

III. Konvergenssek, abszolút konvergenssek illetve feltételesen konvergenssek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n + n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-n}{4+n} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2 + n3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$$

IV. Adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ értékek esetén lesznek az alábbi sorok konvergenssek!

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=0}^{\infty} nx^n & 2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n & 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} x^{2n} \\ 4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)!} (x+7)^n & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 3^n} & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n3^n} \end{array}$$

Sorok szorzata

I. Tekintsük az $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = n$ és $b_n = 1$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy Cauchy-szorzatukra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(a * b)_n = \frac{n(n+1)}{2}$ teljesül.

II. Legyen $q \in]-1, 1[$ és $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $a_n = q^n$. Mutassuk meg, hogy $(a * a)_n = (n+1)q^n$ teljesül, és ennek segítségével igazoljuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$$

formulát.

III. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat (azaz $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| < \infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$).

Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n (-1)^n a_n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

teljesül.