

Kalkulus 1, Haladó feladatok, 6. hét

Leibniz-, abszolút és feltételesen konvergens sorok

I. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n - \log n}$ sor? ($\log = \ln$)

II. Adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ értékek esetén lesznek a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n$$

sorok konvergenssek!

Sorok szorzata

I. Igazoljuk, hogy a $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor konvergens, de önmagával vett Cauchy-szorzata már divergens.

II. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ olyan, hogy $|q| = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n q^n$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right) \cdot \frac{2}{|1 - q|}$$

teljesül.

III. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos változású zérussorozat, és legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\cos x \neq 1$. Igazoljuk, hogy ekkor a $\sum_n a_n \sin(nx)$ sor konvergens, valamint

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nx) \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos x}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \right)$$

teljesül.

Vegyes feladatok sorokból

I. Mutassuk meg, hogy ha az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ teljesül, akkor a $\sum_n \frac{a_n}{n}$ sor divergens.

II. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3 + 1} \right) = \ln \frac{2}{3}$.

III. Igazoljuk, hogy a következő sorok konvergensek!

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1}$ $\left(= \pi; \quad \simeq 1500. \text{ Leibniz} \right)$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 \binom{2n}{n}}$ $\left(= \pi^2; \quad 1748. \text{ Euler} \right)$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n+5}{2^{12n+4}}$ $\left(= \frac{1}{\pi}; \quad 1914. \text{ Ramanujan} \right)$
4. $\frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$ $\left(= \frac{1}{\pi}; \quad 1914. \text{ Ramanujan} \right)$
5. $\frac{3240}{17} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \binom{2n}{n}}$ $\left(= \pi^4; \quad 1974. \text{ Comtet} \right)$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$ $\left(= \pi; \quad 1996. \text{ Bailey} \right)$