

Kalkulus 1, 7. hét

Függvények határértéke I.

I. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek.

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} & 2. \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 25} & 3. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}} \\ 4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right) & 5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x} - x}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}} & 6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}} \right) \end{array}$$

II. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek.

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x} & 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+2x}}{\sin x} & 3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\ 4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right) & 5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} & 6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{\cos(4x) - \cos(6x)} \end{array}$$

III. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek.

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{3x} & 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \cos x}{\sin x} & 3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \cos x - \sin(5x)}{x \sin(x)} \end{array}$$

Függvények konvexitása és folytonossága

I. Igazoljuk, hogy az $\operatorname{id}_{\mathbb{R}} \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ függvény csak a 0 pontban folytonos.

II. Legyen $A = [-1, 0] \cup (]0, 1[\cap \mathbb{Q}) \cup \{3, 4, 5\}$ és legyen

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 2 \text{ és } x \notin \mathbb{Q}, \\ x & \text{ha } x < 2 \text{ és } x \in \mathbb{Q}, \\ 5 & \text{ha } x = 3, \\ 8 & \text{ha } x = 4 \text{ vagy } x = 5. \end{cases}$$

Mely pontokban folytonos az f függvény?

III. Függvény konvexitása és folytonossága.

- Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény az I intervallumon. Mutassuk meg, hogy ekkor az f függvény folytonos.
- Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy az f függvény pontosan akkor konvex, ha minden $x_1, x_2 \in I$ számra

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

teljesül.

Komplex számok

I. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében.

1. $\sin z = \frac{e + e^{-1}}{2}$

2. $\cos z = i$

II. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{C}$ esetén teljesülnek az alábbiak.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = e^{(e^x)}$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k!} = e^{\cos x} \cos \sin x$

3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k!} = e^{\cos x} \sin \sin x$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(kx)}{k!} = e^{\operatorname{ch} x} \operatorname{ch} \operatorname{sh} x$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(kx)}{k!} = e^{\operatorname{ch} x} \operatorname{sh} \operatorname{sh} x$