

Kalkulus 1, Haladó feladatok, 7. hét

I. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ha azok léteznek.

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} & 2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \left((x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right) & 3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) \\
 4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} & 5. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{3}{\sqrt{x}-1} \right) & 6. \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}
 \end{array}$$

II. Fejezzük ki az alábbi sorösszegeket elemi függvényekkel ($\sin$, $\cos$, $\exp$, sh , ch).

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \frac{1}{0!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{12!} + \dots = ? \\
 2. \quad \frac{1}{1!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{13!} + \dots = ? \\
 3. \quad \frac{1}{2!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{14!} + \dots = ? \\
 4. \quad \frac{1}{3!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{11!} + \frac{1}{15!} + \dots = ?
 \end{array}$$

III. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesülnek az alábbiak.

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \text{Ha } x \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \text{ akkor } \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \\
 2. \quad \text{Ha } x, p \in \mathbb{C} \text{ olyan, hogy } p^2 - 2p \cos x + 1 \neq 0, \text{ akkor}
 \end{array}$$

$$\sum_{k=0}^n p^k \sin(kx) = \frac{(p \sin x) + p^{n+1} (p \sin(nx) - \sin((n+1)x))}{p^2 - 2p \cos x + 1}.$$

$$3. \quad \text{Ha } x \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \text{ akkor } \sum_{k=0}^n k \sin(kx) = \frac{(n+1) \sin(nx) - n \sin((n+1)x)}{2(1 - \cos x)}.$$

$$4. \quad \text{Ha } x \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \text{ akkor } \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$$5. \quad \text{Ha } x, p \in \mathbb{C} \text{ olyan, hogy } p^2 - 2p \cos x + 1 \neq 0, \text{ akkor}$$

$$\sum_{k=0}^n p^k \cos(kx) = \frac{(1 - p \cos x) + p^{n+1} (p \cos(nx) - \cos((n+1)x))}{p^2 - 2p \cos x + 1}.$$

$$6. \quad \text{Ha } x \in \mathbb{C} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \text{ akkor } \sum_{k=0}^n k \cos(kx) = \frac{(n+1) \cos(nx) - n \cos((n+1)x) - 1}{2(1 - \cos x)}.$$

IV. Mutassuk meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és $q \in]-1, 1[$ esetén

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin(kx) = \frac{q \sin x}{q^2 - 2q \cos x + 1} \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos(kx) = \frac{1 - q \cos x}{q^2 - 2q \cos x + 1}$$

teljesül.

V. Adott $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ esetén legyenek $p_x \in \mathbb{Z}$ és $q_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ azon egyértelműen meghatározott számok, melyekre $x = \frac{p_x}{q_x}$, valamint p_x és q_x relatív prímek. Az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{q_x}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \end{cases}$$

függvényt *Dirichlet-függvénynek* nevezzük. Igazoljuk, hogy a f Dirichlet-függvénynek

1. minden pontban létezik jobb- illetve bal oldali határértéke;
2. a 0 helyen és minden irracionális pontban folytonos;
3. minden $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ pontban szakadása van, úgy, hogy $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$.