Kalkulus 1, 8. hét

Függvények határértéke II.

I. Számoljuk ki az alábbi határértékeket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{ax} - 1 - ax}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{ax} - \cos(bx) - \sin(bx)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{ch}(ax) + \cos(ax) - 2}{x^4}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(ax) + \sin(ax) - 2ax}{x^5}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{ax} - \cos(ax) - \sin(ax)}{x\left(\mathrm{e}^{bx} - \cos(bx)\right)}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sh}(2x) - \mathrm{ch}(2x) + \cos^2}{\mathrm{sh}\, x}$

Bolzano-tétel következményei

I. Bolzano-tétel következményei.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak van zérushelye.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\mathrm{Ran}\, f = [a, b]$, akkor létezik olyan $x_0 \in [a, b]$, amelyre $f(x_0) = x_0$.
3. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $x_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, melyre $x_0 \sin x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
4. Legyen $f \in C([0, 2], \mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $u, v \in [0, 2]$, melyre
$$v - u = 1 \qquad \text{és} \qquad f(v) - f(u) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$
5. Igazoljuk, hogy minden pillanatban van olyan pont a Földön, ahol ugyanakkora a hőmérséklet, mint a vele átellenes pontban.
6. Igazoljuk, hogy egy négyzet alakú asztalt minden folytonos felületű padlón el lehet úgy forgatni a középpontja körül, hogy egyszerre mind a négy lába a padlón álljon.

Egyenletes folytonosság

I. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \dfrac{1}{x}$, a $g(x) = x^2$ és a $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvény a $]0, 1]$, $[1, 2]$ és a $]0, \infty[$ intervallumon?

II. Bizonyítsuk be, hogy a sin és a cos függvény egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, valamint az $\dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ és a $\sin \dfrac{1}{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ függvény nem egyenletesen folytonos a $]0, 1[$ intervallumon.

III. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f \in C([a, \infty[, \mathbb{R})$ olyan függvény, melyre $\lim\limits_{\infty} f \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész $[a, \infty[$ halmazon.