

Kalkulus 1, 9. hét

Differenciálszámítás I.

I. Deriváljuk a következő függvényeket és hozzuk egyszerűbb alakra a deriváltakat!

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $f(x) = \frac{x^2 - x}{5}$ | 7. $f(x) = \sin^4 3x^2$ | 13. $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$ |
| 2. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} \sqrt[3]{x}}$ | 8. $f(x) = \sin \log x$ | 14. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ |
| 3. $f(x) = \sqrt[4]{3x - 2x^2}$ | 9. $f(x) = \log \sqrt{\cos x}$ | 15. $f(x) = (ax + b)^{cx+d}$ |
| 4. $f(x) = e^x(1 + x^2)$ | 10. $f(x) = \log \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ | 16. $f(x) = \log \sin \cos x^2$ |
| 5. $f(x) = \frac{\sin x}{x + \cos x}$ | 11. $f(x) = \log \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$ | 17. $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right)$ |
| 6. $f(x) = \sin^3 x$ | 12. $f(x) = \frac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x$ | 18. $f(x) = \frac{\sin(x) \log(1 + \cos^2 x^3)}{x}$ |

II. Keressük meg az $f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$ és a $g = \sqrt[5]{\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \operatorname{arctg}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}}^3)}$ függvény deriváltját.

III. Tegyük folytonossá az alábbi függvényeket a 0 pontban, és számoljuk ki a deriváltjukat.

- | | |
|--|---|
| 1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ | $x \mapsto x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ |
| 2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ | $x \mapsto \begin{cases} \frac{\arcsin 2x}{\sin x} + c, & \text{ha } x < 0, \\ x^2 \log x, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$ |

IV. Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény minden pontban differenciálható, azonban az f' függvény nem folytonos.

V. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melynek a deriváltja korlátos. Igazoljuk, hogy ekkor f egyenletesen folytonos az egész I intervallumon.

VI. Adjuk meg az alábbi $f(x)$ függvények x_0 pontbeli érintőjének az egyenletét.

- | | |
|---|--|
| 1. $f(x) = x^2 \quad x_0 = 4$ | 3. $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2} \quad x_0 = \frac{1}{2}$ |
| 2. $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad x_0 = 2$ | 4. $f(x) = \sin x^2 \quad x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ |