

Kalkulus 1, 10. hét

Differenciálszámítás II.

I. Elemi egyenlőtlenségek származtatása a középérték tételekből.

1. Igazoljuk, hogy minden $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ számra $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ számra $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ teljesül.

II. Számoljuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{e^{2x}}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x \sin 2x}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)^x$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$

4. $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$

10. $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{\sin x})^{\operatorname{ctg} \pi x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^3 \ln x^5$

12*. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin \left((2 - \operatorname{ch} x)^{\sin x} \right) - \frac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$

III. Példák a Jensen-egyenlőtlenségre.

1. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $X = \sum_{i=1}^n x_i$ és $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölések mellett

$$X \log \frac{X}{A} \leq \sum_{i=1}^n x_i \log \frac{x_i}{a_i}$$

teljesül. (Segítség: Tekintsük az $\operatorname{id}_{\mathbb{R}} \cdot \log$ függvényt.)

2. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ és $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölés mellett

$$\sqrt[A]{\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}} + \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n y_i^{a_i}} \leq \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)^{a_i}}$$

teljesül. (Segítség: Tekintsük a $\log(1 + \exp)$ függvényt.)

IV. Függvények konvexitása.

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $c \in]a, b[$ szám melyre $f(a) = f(c) = f(b)$, akkor az f függvény állandó.
2. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, melyre g monoton növekvő és $\text{Dom}(g \circ f)$ intervallum. Mutassuk meg, hogy ekkor a $g \circ f$ függvény is konvex.
3. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^{-1})$. Bizonyítsuk be, hogy az $\text{id}_{\mathbb{R}^+} \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha a g függvény konvex. (Igaz marad-e az állítás, ha f nem kétszer differenciálható?)
4. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\log \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha $f \cdot f'' \geq (f')^2$.

V. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^+$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}} = \sqrt{ab} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha .$$