

Kalkulus 1, 11. hét

Differenciálszámítás III.

I. Van-e minimuma illetve maximuma az $f(x) = x^2 e^{-3x}$ függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon, ha igen, határozzuk meg a szélsőértékeket.

II. Szélsőérték feladatok.

1. Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkora legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?

III. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^{-x}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2 \arctg \frac{x}{1+x}$ függvényen.

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol értelmezett a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\text{Dom } f$ halmaz határpontjaiban, mi a lineáris aszimptotája a plusz- és mínusz végtelenben, hol monoton növekvő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van inflexió pontja, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

IV. A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az $\arctg$, $\arcsin$, $\sqrt{1 + id_{\mathbb{R}}}$, $\sqrt[3]{1 + id_{\mathbb{R}}^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

V. Határozzuk meg $\sqrt[3]{10}$ értékét 0,01 pontossággal.

VI. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergenssek (ahol $x \in \mathbb{R}$).

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{e} - 1)^e \quad 2. \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{k}\right) \quad 3. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k}\right)$$

VII. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ és legyen $x_0 \in I$ olyan pont, melyre $f''(x_0) \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az f függvényt az x_0 pontban legjobban közelítő kör egyenlete

$$y : [x_c - R, x_c + R] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto y_c - \text{sgn}(f''(x_0)) \cdot \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2},$$

ahol

$$R = \frac{(1 + f'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}, \quad x_c = x_0 - f'(x_0) \cdot \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)} \quad \text{és} \quad y_c = f(x_0) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

(Vagyis igazoljuk, hogy az $y : [x_c - R, x_c + R] \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletű félkörre $y(x_0) = f(x_0)$, $y'(x_0) = f'(x_0)$ és $y''(x_0) = f''(x_0)$ teljesül.)