

Kalkulus 1, 12. hét

Határozatlan integrál

I. Számítsuk ki a következő integrálokat.

1. $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} \, dx$	2. $\int \frac{1}{x^2} \, dx$	3. $\int 1 + e^{x-1} \, dx$
4. $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \, dx$	5. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$	6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$
7. $\int \frac{1}{\sin^2} \, dx$	8. $\int \frac{1}{\cos^2} \, dx$	9. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2} \, dx$
10. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2} \, dx$	11. $\int \operatorname{sh} \, dx$	12. $\int \operatorname{ch} \, dx$

II. A parciális integrálás segítségével határozzuk meg az alábbi integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. $\int x e^{ax} \, dx$	2. $\int x^2 e^{-ax} \, dx$	3. $\int x \sin x \, dx$
4. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$	5. $\int e^x \cos x \, dx$	6. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$
7. $\int \sqrt{1+x^2} \, dx$	8. $\int \sqrt{x^2-1} \, dx$	9. $\int \arcsin x \, dx$
10. $\int \operatorname{arctg} x \, dx$	11. $\int x \operatorname{arctg} ax \, dx$	12. $\int x^3 \ln^2 x \, dx$

III. A következőkben a racionális törtfüggvényekre vonatkozó integrálási szabályt alkalmazzuk.

1. $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx$	2. $\int \frac{1}{x^2-2x-3} \, dx$	3. $\int \frac{1}{x^2+2x+6} \, dx$
4. $\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3} \, dx$	5. $\int \frac{1}{x^3+1} \, dx$	6. $\int \frac{x^4}{(x-2)(x-3)(x-4)} \, dx$
7. $\int \frac{16x^2+4x}{x^4+4} \, dx$	8. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} \, dx$	9. $\int \frac{x^4+4}{x^3-1} \, dx$
10. $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \, dx$	11. $\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2} \, dx$	12. $\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2} \, dx$

IV. A következő integrálok kiszámításához alkalmazzunk megfelelő helyettesítést. ($k \in \mathbb{N}$)

1. $\int \frac{x^3}{(x+2)^4} \, dx$	2. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + (\sqrt{1+x})^3} \, dx$	3. $\int x \sqrt[4]{x-1} \, dx$
4. $\int \frac{e^{4x}}{1+e^x} \, dx$	5. $\int \sqrt{e^x-1} \, dx$	6. $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx$

$$\begin{array}{lll}
7. & \int \sqrt{1-x^2} \, dx & 8. & \int \sin^k x \cdot \cos x \, dx & 9. & \int \cos^k x \cdot \sin x \, dx \\
10. & \int \operatorname{ctg} x \, dx & 11. & \int \operatorname{tg} x \, dx & 12. & \int \operatorname{tg}^2 x \, dx \\
13. & \int \operatorname{tg}^4 x \, dx & 14. & \int \frac{2}{e^{3x} - e^x} \, dx & 15. & \int \frac{1}{x + \sqrt{x-1} - 1} \, dx
\end{array}$$

V. A következő integrálok kiszámításához gondoljunk az elemi függvények ($\sin$, tg , $\exp$, arctg , $\arcsin$,...) deriváltjára és a deriválásnál megismert láncszabályra.

$$\begin{array}{lll}
1. & \int x e^{-x^2} \, dx & 2. & \int \frac{3^x}{1+9^x} \, dx & 3. & \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx \\
4. & \int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} \, dx & 5. & \int \frac{\cos \ln x}{x} \, dx & 6. & \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx
\end{array}$$

VI. Trigonometrikus azonosságok segítségével számoljuk ki az alábbi határozatlan integrálokat.

$$\begin{array}{lll}
1. & \int \cos 2x \cos 5x \, dx & 2. & \int \cos^5 x \sin^2 x \, dx & 3. & \int \cos^5 x \, dx \\
4. & \int \cos^5 x \sin^3 x \, dx & 5. & \int \sin^4 x \, dx & 6. & \int \cos^5 x \sin^5 x \, dx
\end{array}$$