

Kalkulus 1, 13. hét

Határozott integrál I.

I. Keressünk hibát az alábbi parciális integráláson alapuló számításban.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, dx = \log x \cdot \frac{1}{\log x} - \int \log x \cdot \frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \, dx = 1 + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, dx$$
$$0 = 1$$

II. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} & 2. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 & 3. \quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{3} \\ 4. \quad \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln 2 & 5. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, dx = \frac{1}{2} & 6. \quad \int_0^1 (1-2x)^{19} \, dx = 0 \\ 7. \quad \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, dx = \frac{1}{6} & 8. \quad \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx = 1 + \ln \frac{2}{1+e} & 9. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} \, dx = 1 \end{array}$$

III. Legyen $f \in C([0, \pi], \mathbb{R})$ és mutassuk meg, hogy ekkor

$$\int_0^\pi f(\sin x) \cos x \, dx = 0$$

teljesül.

IV. Számoljuk ki az

$$\int_0^\pi \log \sin x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx$$

integrálok értékét.

V. Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{ak}{n}\right)} = \frac{(1+a)^{1+\frac{1}{a}}}{e}$$

teljesül.

VI. Legyen $f \in \mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$ olyan függvény, melyhez létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén $f(x) \geq c$ teljesül. Keressük meg a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

határértéket.

VII. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ teljesül.

VIII. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n$.

1. Igazoljuk, hogy $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, valamint minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_n \geq I_{n+1}$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{2n}^2 \geq I_{2n} I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \geq I_{2n+2}^2.$$

4. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} \geq I_{2n} \sqrt{2n} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}}.$$

5. Igazoljuk a *Wallis-formulát*.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \sqrt{\pi}$$

IX. Tekintsük az alábbi sorozatot.

$$a : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$$

1. Mutassuk meg, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

2. Igazoljuk, hogy az a sorozat monoton fogyó.
3. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}'$ esetén

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

teljesül.

4. Mutassuk meg, hogy az a sorozat alulról korlátos.

(A

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

számot *Euler-Mascheroni-állandónak* nevezzük, $\gamma \approx 0.5772156649$.)