Kalkulus 1, 14. hét

Határozott integrál II.

I. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^{4x} \sqrt{1+t^8}\,\mathrm{d}\,t$ és $g(x) = \int\limits_{\sin x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}\,t$. Határozzuk meg az f és g függvény deriváltját!

II. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}\,t}{x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}\,t}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}\,t}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}\,t}{x^3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg} 3t\,\mathrm{d}\,t}{x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t}{\frac{1}{x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,\mathrm{d}\,t}{\sqrt{x^2+1}}$

III. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

1. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ 2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}\,x$ 3. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}\,x$

4. $\int_1^\infty \frac{1}{2^x-1}\,\mathrm{d}\,x$ 5. $\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$ 6. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}\,x$

7. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}\,x$ 8. $\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}\,x$ 9. $\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}\,x$

IV. Számoljuk ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ és a $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ határértéket.

V. Konvergensek-e az alábbi integrálok?

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sin 2x}\,\mathrm{d}\,x$ 2. $\int_0^1 \frac{1}{\sin 2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$ 3. $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}\,x$

4. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}\,x$ 5. $\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x})^3}\,\mathrm{d}\,x$ 6. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos^2(x^5+3)}{x^4+3x^2+5}\,\mathrm{d}\,x$

7. $\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$ 8. $\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}-\sin^2 x}\,\mathrm{d}\,x$ 9. $\int_3^\infty \frac{1}{2x^2+\sin x}\,\mathrm{d}\,x$

10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x+x^3}}\,\mathrm{d}\,x$ 11. $\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2x}(1+\sqrt{x})^3}\,\mathrm{d}\,x$ 12. $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}\,x$