

Írásbeli vizsgatematika

Kalkulus 1, 2015/16 I. félév

- 1. Halmazelméleti alapok.** Elemi halmazelméleti jelek és műveletek ($\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$) Injektív-, szürjektív- és bijektív függvények. Halmazrendszer fogalma. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz infimuma, szuprémuma, legnagyobb és legkisebb eleme. Véges, végtelen, megszámlálható és megszámlálhatóan végtelen halmaz.
- 2. A valós számok topológiája.** A valós számok axiómái. Belső pont, határpont, torlódási pont, izolált pont. Nyílt, zárt és korlátos halmaz. Sűrű halmaz. Bernoulli-egyenlőtlenség. Binomiális tétel.
- 3. Sorozatok.** A határérték és elemi tulajdonságai. Monoton, korlátos sorozat fogalma és tulajdonságai. Részsorozat. Torlódási pont jellemzése sorozatokkal. Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel. $\liminf$, $\limsup$. Cauchy-sorozat, Cauchy-kritérium. Nevezetes határértékek: n^α , q^n , $\sqrt[n]{n}$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
- 4. Sorok.** Sor konvergenciája, és elemi tulajdonságai. Cauchy-kritérium. Sor abszolút konvergenciája. Majoráns/minoráns kritérium. Konvergencia-kritériumok: kondenzációs, gyök, hányados és integrál kritérium. Leibniz-sor. Feltétlen és feltételesen konvergens sorok. Cauchy-szorzat. Mertens-tétel. Abel-féle kritérium.
- 5. Elemi függvények.** Elemi függvények ($\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch) definíciója. Az $\exp$ tulajdonságai. Euler-formula. A $\sin$, $\cos$ alaptulajdonságai.
- 6. Függvények jellemzői és határértéke.** Páros, páratlan, (szigorúan) monoton növekvő és csökkenő, konkáv és konvex, periodikus függvény. Jensen-egyenlőtlenség. Függvény határértéke és a határérték tulajdonságai. Átviteli elv határértékekre. Bal és jobb oldali határérték, kapcsolatuk a határértékekkel.
- 7. Valós-valós függvények folytonossága.** Függvény folytonossága, folytonos függvények halmazának zártsága a műveletekre nézve. Átviteli elv folytonosságra. A folytonosság topologikus jellemzése. Weierstrass-féle maximum-minimum elv. Bolzano-tétel. Egyenletes folytonosság, Heine-tétel.
- 8. A differenciálszámítás alapjai.** A differenciálás fogalma, függvény deriváltja. A folytonosság kapcsolata a differenciálhatósággal. Differenciálás alaptulajdonságai. Középértéktételek: Rolle, Lagrange, Cauchy. L'Hospital-szabály. n -szer és végtelenszer differenciálható függvények. Folytonosan differenciálható függvények.
- 9. A differenciálszámítás alkalmazása.** Konvexitás/konkavitás kapcsolata a deriválással. Taylor-polinom. Lokális szélsőérték fogalma és kapcsolata a függvény deriváltjával. Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenség.
- 10. Határozatlan integrál.** Határozatlan integrál fogalma és elemi határozatlan integrálok. Parciális és helyettesítéssel integrálás. Parciális törtekre bontás. Racionális törtfüggvények integrálása.
- 11. Határozott integrálás.** Intervallum felosztása. Alsó és felső közelítő összeg. Korlátos függvény alsó és felső integrálja. Riemann-integrálhatóság definíciója. Riemann-integrál tulajdonságai. Oszcillációs összeg. A Riemann-integrálható függvények.

12. A Riemann-integrálhatóság kritériumai. A Riemann-integrál alkalmazásai (ívhossz, terület, felszín, térfogat és ezen alakzatok súlypontjának a kiszámítására). Improprius integrál. Integrálfüggvény és tulajdonságai. Nulla mértékű halmazok fogalma és tulajdonságai. Lebesgue-tétel.