Kalkulus 1, 3. hét

Valós számok elemi topológiája

I. Határozzuk meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait a valós számtest felett; döntsük el, hogy rendelkeznek-e a nyíltság, zártság, korlátosság, kompaktság tulajdonságokkal; valamint adjuk meg a lezártjukat és a belsejüket.

1. $A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
2. $A_2 = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$
3. $A_3 =]-2, -1[\cup [2, 3] \cup [4, \infty[$

II. Igazoljuk, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\overline{\{z \in \mathbb{R} |\ |x - z| < r\}} = \{z \in \mathbb{R} |\ |x - z| \le r\}$$

teljesül.

III. Adjunk példát olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra, melyre $\operatorname{Int} \overline{A} = \mathbb{R}$ és $\overline{\operatorname{Int} A} = \emptyset$ teljesül.

IV. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Igazoljuk, hogy ekkor fennállnak az alábbi egyenlőségek.

$$\operatorname{Int} A = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus A} \qquad \overline{A} = \mathbb{R} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus A)$$

V. Adjunk példát olyan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszerre, ahol minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, korlátos halmaz, $A_{n+1} \subseteq A_n$ teljesül, valamint $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Haladóbb feladatok

I. Mutassuk meg, hogy ha $A \subseteq \mathbb{R}$ olyan halmaz, mely zárt és nyílt, akkor $A = \emptyset$ vagy $A = \mathbb{R}$ teljesül.

II. Jelölje $\mathbb{P}$ a prímszámok halmazát. Használjuk fel azt a számelméleti tételt, mely szerint minden $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ számhoz egyértelműen létezik olyan egész értékű $(\mu_p(x))_{x\in\mathbb{P}}$ sorozat és olyan $e \in \{-1, 1\}$ elem, hogy a $\{p \in \mathbb{P} |\ \mu_p(x) \neq 0\}$ halmaz véges, és

$$x = e \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\mu_p(x)}$$

teljesül. Legyen $p \in \mathbb{N}$ tetszőleges prímszám, és definiáljuk az

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} p^{-\mu_p(x)}, & \text{ha} \quad x \neq 0; \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Igazoljuk, hogy $|\cdot|_p$ abszolútérték, azaz olyan függvény melyre teljesülnek az alábbiak.

i. $\forall x \in \mathbb{Q}: \ \Big(|x|_p = 0 \ \leftrightarrow \ x = 0\Big)$

ii. $\forall x, y \in \mathbb{Q}: \ |xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$

iii. $\forall x, y \in \mathbb{Q}: \ |x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

III. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazról azt mondjuk, hogy *sehol sem sűrű*, ha $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$. Igazoljuk, hogy

1. az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ halmaz sűrű;
2. véges sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű.