

Kalkulus 1, 4. hét

Sorozatok definíció szerinti konvergenciája

I. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $K = 100$ korláthoz.

1. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
2. $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 5$
3. $a_n = \sqrt{n^4 + 2n^3}$
4. $a_n = \sqrt{n^4 - 5n^3}$

II. Mutassuk meg az alábbi határértékeket a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $\varepsilon = 10^{-3}$ korláthoz.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n - 3}{2n + 1} = 4$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n - 5}{2n^2 + 2n + 2} = 3$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{n} + \sin n}{n + 2} = 2$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 2n} - n = 1$

Speciális sorozatok konvergenciája I.

I. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$ | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 6}{3n^2 - 1}$ | 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$ |
| 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$ | 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 3\sqrt{n} - 9)$ | 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n - 2}{5n^3 + 2n^2 + n + 1}$ |

II. Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 - n})$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^4 + n})$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 3} - \sqrt{n^2 + an + 1}) \quad (a \in \mathbb{R})$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^6 + n^5} - \sqrt[3]{n^6 - n^5})$

III. Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1} = 7 - \frac{10}{a_n}, a_1 = 4$
2. $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}, a_1 = 1$ és $a_1 = 5$
3. $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, a_1 = 1$

IV. Legyen $a_0, a_1 = 1$, és minden $n \in \mathbb{N} \setminus 2$ esetén legyen

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

1. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$a_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

teljesül.

2. Igazoljuk, hogy a

$$b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad n \mapsto \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

sorozat olyan Cauchy-sorozat, mely nem konvergens a $\mathbb{Q}$ számtestben.

Haladóbb speciális sorozatok

I. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \leq a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

II. Igazoljuk a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n \right\} = 1$ határértéket, ahol $\{\cdot\}$ a törtrész függvényt jelöli!

III. Igazoljuk az alábbi határértékeket.

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$