Kalkulus 1, 5. hét

Speciális sorozatok konvergenciája II.

I. Határozzuk meg a következő határértékeket!

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n}$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n}$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$
4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}$
5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$
6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+100}$
7. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-100}$
8. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$
9. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$
10. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3-2n+3}{n\sqrt{n}+8}}$
11. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2 5^n}{9n^3+10^n}$
12. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^2+1}{10^n n^3+\sqrt{n}}$
13. $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{4^n}}{\frac{n^2}{5^n}}$
14. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2014^n n+2015^n}$
15. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+2^n}{n+3^n}}$
16. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n n+n^2}{2^n n+\sqrt{n}}}$
17. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+4^n}{5^n+3^n n^2}}$
18. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 3^n+n^3 4^n}{n^4 5^n}}$

II. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket.

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$
2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$
3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$
4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n+3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^2}$
5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^n = \sqrt[5]{\mathrm{e}}$
6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^n = 0$
7. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = 0$
8. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n+1}{2n^2+3n+2}\right)^n = \mathrm{e}^2$

$\liminf$, $\limsup$

I. Határozzuk meg a következő a sorozatok esetén $\limsup a$ és $\liminf a$ értékét!

1. $a_n = \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right)\frac{2n^2-3}{n^2+n+8}$
2. $a_n = \frac{4-n^2}{n+3}$
3. $a_n = \sqrt{\frac{n^3+(-1)^n n^3}{3n^3+n+8}}$
4. $a_n = \left(\frac{3-n}{5+n}\right)\left(\frac{4n-1}{2n+5}\right)^3$

II. Mutassuk meg, hogy minden $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatra teljesülnek az alábbiak.

1. Az $x \in \mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\limsup a = x$, ha minden $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c < a_n\}$ halmaz végtelen, és minden $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c < a_n\}$ halmaz véges.
2. Az $x \in \mathbb{R}$ számra pontosan akkor teljesül, hogy $\liminf a = x$, ha minden $c < x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c > a_n\}$ halmaz véges, és minden $c > x$ esetén az $\{n \in \mathbb{N} |\ c > a_n\}$ halmaz végtelen.

Haladóbb speciális sorozatok

I. Igazoljuk következő határértékeket!

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}\right)^{2n+1} = \mathrm{e}^{10}$
2. $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1) = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} n(n(\sqrt[n]{\mathrm{e}} - 1) - 1) = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{n\to\infty} n^{2n} \left(\sqrt{n^4 + 1} - n^2\right)^n = 0$
5. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{10}{3}} \left(\sqrt[3]{n^8 + 6n^2} - \sqrt[3]{n^8 - 1}\right) = 2$
6. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{n^2 + 6n + 3} - \sqrt[6]{n^4 + 12n^3 + 2}\right) = 7$

II. Igazoljuk az alábbi összefüggéseket minden $k \in \mathbb{N}^+$ paraméterre.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k\right) = \frac{1}{k+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^k - \frac{n}{k+1}\right) = \frac{1}{2}$$

III. Adott $k \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{k} p_i^n} = \max\{p_1, \ldots, p_k\}.$$

IV. Legyen $a_1, d > 0$ és tekintsük az $a_n = a_1 + (n-1)d$ számtani sorozatot. Mutassuk meg, hogy a sorozat elemeinek geometria és számtani közepének a hányadosára az alábbi teljesül.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}}{a_1 + \cdots + a_n} = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

V. Legyen $0 < x_0 \le y_0$ tetszőleges valós számpár. Definiáljuk az $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ rekurzióval az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokat. Igazoljuk, hogy ezek konvergens sorozatok és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

VI. Legyen $x_0, c \in \mathbb{R}^+$. Adjuk meg az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot az alábbi iterációval.

$$x_{k+1} = \frac{2}{3} x_k + \frac{1}{3} \frac{c}{x_k^2}$$

Igazoljuk, hogy
$$\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt[3]{c}.$$

VII. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, melyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{m+n} \leq a_m a_n$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}\ .$$

VIII. Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = \operatorname{tg} n$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy minden $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozathoz, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik az a sorzatnak olyan $n \mapsto a_{\sigma(n)}$ részsorozata, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left|a_{\sigma(n)} - b_n\right| < \varepsilon$ teljesül.