Kalkulus 1, 11. hét

Differenciálszámítás II.

I. Elemi egyenlőtlenségek származtatása a középérték tételekből.

1. Igazoljuk, hogy minden $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ számra $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ számra $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$ teljesül.

II. Számoljuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3}{e^{2x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x\sin 2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to +0} x^x$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2 - e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 \ln x^5$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x$
9. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$
10. $\lim\limits_{x\to +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x}}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ch} 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

12*. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\arcsin\left((2-\operatorname{ch} x)^{\sin x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}$

III. Példák a Jensen-egyenlőtlenségre.

1. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $X = \sum_{i=1}^n x_i$ és $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölések mellett
$$X \log\frac{X}{A} \leq \sum_{i=1}^n x_i \log\frac{x_i}{a_i}$$
teljesül. (Segítség: Tekintsük az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \log$ függvényt.)
2. Igazoljuk, hogy minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ és $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ számra, az $A = \sum_{i=1}^n a_i$ jelölés mellett
$$\sqrt[A]{\prod_{i=1}^n x_i^{a_i}} + \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n y_i^{a_i}} \leq \sqrt[A]{\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)^{a_i}}$$
teljesül. (Segítség: Tekintsük a $\log(1 + \exp)$ függvényt.)

IV. Függvények konvexitása.

1. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $c \in]a, b[$ szám melyre $f(a) = f(c) = f(b)$, akkor az f függvény állandó.
2. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan konvex függvény, melyre g monoton növő és $\mathrm{Dom}(g \circ f)$ intervallum. Mutassuk meg, hogy ekkor a $g \circ f$ függvény is konvex.
3. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható fggvény, továbbá legyen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(x^{-1}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^+} f$ függvény pontosan akkor konvex, ha a g függvény konvex. (Igaz marad-e az állítás, ha f nem kétszer differenciálható?)
4. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}^+$ kétszer differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\log \circ f$ függvény pontosan akkor konvex, ha $f \cdot f'' \geq (f')^2$.

V. Van-e minimuma illetve maximuma az $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-3x}$ függvénynek a $[0, 1]$ intervallumon, ha igen, határozzuk meg a szélsőértékeket.

VI. Szélsőérték feladatok.

1. Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkorák legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?

VII. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-x}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{1+x}$ függvényen.

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol értelmezett a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz határpontjaiban, mi a lineáris aszimptotája a plusz- és mínusz végtelenben, hol monoton növő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol konvex illetve konkáv a függvény, hol van inflexiós pontja, hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

VIII. A binomiális sorfejtés segítségével írjuk fel az arctg, arcsin, $\sqrt{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$, $\sqrt[3]{1+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2}$ függvény 0 körüli 9-ed rendű Taylor-polinomját.

IX. Határozzuk meg $\sqrt[3]{10}$ értékét $0,01$ pontossággal.

X. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek (ahol $x \in \mathbb{R}$).

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{\mathrm{e}} - 1\right)^{\mathrm{e}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{x}{k}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}\right)$