Kalkulus 1, 13. hét

Határozott integrál I.

I. Keressünk hibát az alábbi parciális integráláson alapuló számításban.

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, \mathrm{d}\, x = \log x \cdot \frac{1}{\log x} - \int \log x \cdot \frac{-1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\, x = 1 + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \, \mathrm{d}\, x$$

$$0 = 1$$

II. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

1. $\displaystyle\int_0^1 x \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}\, x = 1$
3. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}\, x = \frac{\pi}{3}$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\, x = \ln 2$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$
6. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x)^{19} \, \mathrm{d}\, x = 0$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{6}$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}\, x = 1 + \ln \frac{2}{1+\mathrm{e}}$
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} \, \mathrm{d}\, x = 1$

III. Legyen $f \in C([0,\pi], \mathbb{R})$ és mutassuk meg, hogy ekkor $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x) \cos x \, \mathrm{d}\, x = 0.$

IV. Számoljuk ki az alábbi integrálok értékét.

$$\int_0^{\pi} \log \sin x \, \mathrm{d}\, x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, \mathrm{d}\, x \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, \mathrm{d}\, x$$

V. Igazoljuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{ak}{n}\right)} = \frac{(1+a)^{1+\frac{1}{a}}}{\mathrm{e}}.$$

VI. Legyen $f \in \mathcal{R}([0,1], \mathbb{R})$ olyan függvény, melyhez létezik olyan $c \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in [0,1]$ esetén $f(x) \geq c$ teljesül. Keressük meg a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

határértéket.

VII. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ teljesül.

VIII. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n$.

1. Igazoljuk, hogy $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, valamint minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ esetén $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ teljesül.
2. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $I_n \geq I_{n+1}$.
3. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$I_{2n}^2 \geq I_{2n} I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \geq I_{2n+2}^2 \ .$$

4. Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n-1}} \geq I_{2n}\sqrt{2n} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2n}{2n+1}} \ .$$

5. Igazoljuk a *Wallis-formulát*.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \sqrt{\pi}$$

IX. Tekintsük az alábbi sorozatot.

$$a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R} \qquad n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

1. Mutassuk meg, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

2. Igazoljuk, hogy az a sorozat monoton fogyó.
3. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}'$ esetén

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \ \mathrm{d}\, x \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

teljesül.

4. Mutassuk meg, hogy az a sorozat alulról korlátos.

(A

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

számot *Euler-Mascheroni-állandónak* nevezzük, $\gamma \approx 0.5772156649$.)