

Kalkulus 1, 14. hét

Határozott integrál II.

I. Legyen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^{4x} \sqrt{1+t^8} dt$ és $g(x) = \int_{\sin x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$. Határozzuk meg az f és g függvény deriváltját!

II. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2} & 2. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt} & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \operatorname{arctg} 3t dt}{x^2} & 5. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt}{\frac{1}{x}} & 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

III. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx & 2. \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} dx & 3. \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx) dx \\ 4. \int_1^\infty \frac{1}{2^x-1} dx & 5. \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx & 6. \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ 7. \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx & 8. \int_0^1 \log x dx & 9. \int_0^\infty x e^{-ax} dx \end{array}$$

IV. Számoljuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ és a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ határértéket.

V. Konvergensek-e az alábbi integrálok?

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^1 \frac{1}{\sin 2x} dx & 2. \int_0^1 \frac{1}{\sin 2\sqrt{x}} dx & 3. \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx \\ 4. \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx & 5. \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{1-x})^3} dx & 6. \int_0^\infty \frac{x^2 \cos^2(x^5+3)}{x^4+3x^2+5} dx \\ 7. \int_3^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sin^2 x} dx & 8. \int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x}-\sin^2 x} dx & 9. \int_3^\infty \frac{1}{2x^2+\sin x} dx \\ 10. \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1+x} \right) dx & 11. \int_0^\infty \frac{\sin^2 \left(+\frac{1}{x} \right)}{\sqrt{2x}(1+\sqrt{x})^3} dx & 12. \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \end{array}$$