Kalkulus 1, 14 .hét

Határozott integrál alkalmazásai
Feladatok

I. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C^1([a,b], \mathbb{R}^+)$.

1. Legyen az f függvény ívhosszúsága L_f, a grafikonjának a súlypontja legyen $(x_s(L_f), y_s(L_f))$, valamint a grafikon X-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest felszíne legyen F_f. Igazoljuk, hogy ekkor
$$F_f = 2\pi y_s L_f$$
teljesül. (*Papposz–Guldin I. tétele.*)
2. Legyen az $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \in I,\ 0 \le y \le f(x)\right\}$ halmaz területe T_f, a súlypontja legyen $(x_s(T_f), y_s(T_f))$, valamint a grafikon X-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata legyen V_f. Igazoljuk, hogy ekkor
$$V_f = 2\pi y_s T_f$$
teljesül. (*Papposz–Guldin II. tétele.*)

II. Válaszoljuk az alábbi kérdésekre.

1. Ívhosszszámítás. Mekkora az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az ívhossza?
2. Felszínszámítás. Mekkora az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az X tengely körüli megforgatásával nyert forgástest felszíne?
3. Térfogatszámítás. Mekkora az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az X tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata?
4. Görbe súlypontja. Hol van az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének a súlypontja? (A c. pontban szereplő függvényt ne vizsgáljuk!)
5. Síkbeli alakzat súlypontja. Hol van az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ függvény és az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz által meghatározott $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \in I,\ 0 \le y \le f(x)\right\}$ alakzat súlypontja?
6. Forgástest súlypontja. Hol van az f függvény $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumhoz tartozó részének az X tengely körüli megforgatásával nyert forgástest súlypontja?

Ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$ paraméter, és

a. $f(x) = ax$, $I = [0,b]$;
b. $f(x) = ax^2$, $I = [0,b]$;
c. $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $I = [0,b]$;
d. $f(x) = \operatorname{ch} x$, $I = [0,b]$.