

## Számítási módszerek a fizikában 1, 4. hét

I. Végezzük el a következő polinomosztásokat.

$$\frac{x^4 + x^3 - 6x^2 + 4x + 12}{x + 3} \quad \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

II. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés.

1. Jelölje  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  az  $x^2 + 3x - 7 = 0$  egyenlet megoldásait. Számítsuk ki  $\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$  értékét.
2. Jelölje  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\lambda_3$  az  $x^3 - x^2 + x - 3 = 0$  egyenlet megoldásait. Számítsuk ki  $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k}$  értékét.
3. Mely  $p \in \mathbb{R}$  paraméter esetén teljesül az  $x^3 + px^2 + 2x - 3 = 0$  egyenlet  $\lambda_1, \lambda_2$  és  $\lambda_3$  megoldásaira a  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 = 5$  feltétel?
4. Jelölje  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  az  $x^2 + 3x - 7 = 0$  egyenlet megoldásait. Számítsuk ki  $\sqrt[3]{\lambda_1} + \sqrt[3]{\lambda_2}$  értékét.

III. Írjuk fel a következő kifejezéseket a Kronecker-delta segítségével.

1. Adott  $j, k, l, m \in \{1, 2, 3\}$  esetén  $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = ?$
2. Adott  $k, l \in \{1, 2, 3\}$  esetén  $\sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = ?$
3.  $\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = ?$
4.  $\sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ikj} = ?$

IV. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.

1. Mutassuk meg, hogy minden  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$  esetén  $n^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right)$ .
2. Mutassuk meg, hogy ha az  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$  számokra  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  teljesül, akkor  $a + 2b + 3c + 4d \leq \sqrt{30}$ . Milyen esetben van egyelőség?
3. Mutassuk meg, hogy minden  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  esetén  $4(ad - bc)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

V. Igazoljuk, hogy minden  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$  vektorra teljesülnek az alábbiak.

1.  $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$
2.  $(a \times b) \times (c \times d) = -\langle a, b \times c \rangle d + \langle a, b \times d \rangle c + \langle a, b \times d \rangle c$
3.  $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$
4.  $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$