Számítási módszerek a fizikában 1, 5. hét

I. Affin alterek.

1. Írjuk fel a $A = (2,3,1)$ és a $B = (4,5,-1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy a $P = (1,3,1)$ ponton és irányvektora párhuzamos a $(1,0,1)$ vektorral.
3. Írjuk fel a $A = (2,3,4)$, $B = (4,5,-1)$ és a $C = (3,1,3)$ pontokon átmenő sík egyenletét.
4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy a $P = (1,3,1)$ ponton és normálvektora párhuzamos a $(1,0,1)$ vektorral.

II. Határozzuk meg az alábbi távolságokat.

1. Mekkora a $(2,1,3)$ és a $(4,6,-1)$ pont távolsága?
2. Mekkora a $(-1,2,1)$ pont és az $r(t) = (1,12,3) + t(2,-1,3)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes távolsága?
3. Mekkora a $(-1,2,1)$ pont és a $2x - 4y + 2z = 1$ sík távolsága?
4. Mekkora az $\dfrac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$ és a $2 - x = y - 5 = z + 1$ egyenesek távolsága?
5. Mekkora az $r(t) = (1,1,3) + t(0,-1,2)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes és az $x - 2y + z = 1$ sík távolsága?
6. Mekkora a $2x - 4y + 2z = 1$ és az $x - 2y + z = 1$ síkok távolsága?

III. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az alábbi lineáris transzformációk mátrixát.

1. Az origón átmenő, $v \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenesre való ortogonális vetítés és tükrözés. (A $v = (1,-1,2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
2. Az origón átmenő, $n \in \mathbb{R}^3$ normálvektorú síkra való ortogonális vetítés és tükrözés. (Az $n = (1,-1,2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
3. Határozzuk meg a (x,y) síkbeli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
4. Határozzuk meg az $(1,1,0)$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

5* Határozzuk meg az $n \in \mathbb{R}^3$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

IV. Tekintsünk egy egydimenziós harmonikus rezgőmozgást adott D (direkciós állandó) és m (tömeg) paraméterekkel. A koordinátarendszer kezdőpontja legyen a rugó nyugalmi hosszánál. Adott $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban a test helye legyen $x(t)$ sebessége pedig $v(t)$. Ezekből képezzük a $z(t) = (x(t), v(t))$ vektort. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $A(t)$ lineáris transzformáció, melyre $z(t) = A(t)z(0)$ teljesül.

V*. Tekintsük az alábbi egydimenziós tökéletesen rugalmas ütközéssel kapcsolatos problémát. Egy $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű kiskocsi $v_0 \in \mathbb{R}^+$ sebességgel közelít a merev fal felé. A kiskocsi és a fal között egy $m \in]0, M[$ tömegű, $u_0 \in \mathbb{R}^+$ sebességű kislabda van. Az n-edik ütközésük után a sebességük legyen v_n illetve u_n.

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sqrt{M} v_n$, $\beta_n = \sqrt{m} u_n$ és $w_n = (\alpha_n, \beta_n)$. Mutassuk meg, hogy az ütközés ekkor a $w_{n+1} = B w_n$ alakba írható, ahol $B = \dfrac{1}{M+m}\begin{pmatrix} M-m & -2\sqrt{mM} \\ 2\sqrt{mM} & M-m \end{pmatrix}$.
2. Igazoljuk, hogy ha $\varphi = \arccos \dfrac{M-m}{M+m}$, akkor $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
3. Mutassuk meg, hogy az ütközések száma $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varphi}\left(\pi - \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}\left(x \dfrac{u_0}{v_0}\right)\right)\right\rfloor + 1$, ahol $x = \sqrt{\dfrac{m}{M}}$.

   Mélyebb ismeretekkel az is megmutatható, hogy az $u_0 = v_0$ esetben az ütközések száma (kis x értékek esetén)
$$N = \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi x}{6} + \mathcal{O}(x^3).$$