Számítási módszerek a fizikában 1, 6. hét

I. Mekkora a $p(x) = x^2+1$ és a $q(x) = x^3$ polinomok által bezárt szög a polinomok V vektorterében, ha a polinomok skaláris szorzatát a $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $\langle p, q\rangle = \int_0^\alpha (pq)$ kifejezéssel definiáljuk, ahol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméter?

II. Mutassuk meg, hogy a $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren a $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterekkel definiált

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto x_1y_1 + 4x_2y_2 - px_1y_2 - qx_2y_1$$

leképezés pontosan akkor skaláris szorzás, ha $p = q \in \,]-2, 2[$ teljesül.

III. Lineáris alterek.

1. Az $\mathbb{R}^3$ térben alteret alkotnak-e a következő halmazok?

   1. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + 4z = 5\right\}$
   2. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = \frac{y}{3} = -3z\right\}$
   3. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2\right\}$
   4. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 3z\right\}$

2. A folytonos függvények $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ terében alteret alkotnak-e a következő halmazok?

   $$\{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\} \qquad \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\} \qquad \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) \le 0\}$$

3. A valós sorozatok terében alteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

   1. $\{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid a_1 = 2a_3 + 3a_5\}$
   2. $\left\{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$
   3. $\{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid a \text{ számtani sorozat}\}$
   4. $\{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid a \text{ mértani sorozat}\}$

IV. Lineáris függetlenség.

1. Igaz-e, hogy ha az $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ vektorok közül bármely 9 vektor lineárisan független, akkor mind a 10 is lineárisan független?
2. Hány lineárisan független vektor van az $(1,1,1,1)$, $(2,2,1,4)$, $(1,-1,1,-1)$, $(2,1,1,3)$ vektorok között?
3. Felírható-e az $x^3 + 7x^2 + 5$ polinom az $x^3 + 2x$, $3x^3 + 4x$ és $5x^2 + 6x$ polinomok lineáris kombinációjaként?
4. Az $\left\{a + b\cos x + c\cos^2 x \mid a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$ térben bázist alkotnak-e az $1 + \cos x$, $\cos x + \cos^2 x$ és $\cos 2x$ vektorok?

V. Adjuk meg az alábbi skalárszorzatos vektorterekben a kezdeti vektorok Gram–Schmidt ortogonalizáltját!

1. A vektortér az $\mathbb{R}^3$ a megszokott skaláris szorzással, a kezdeti vektorok $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-1,2,-1)$ és $v_3 = (3,2,1)$.
2. A vektortér a legfeljebb másodfokú polinomok tere, két vektor skaláris szorzata $\langle p, q\rangle = \int_0^1 (pq)$, a kezdeti vektorok $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ és $p_3(x) = x^2$.

VI. Legyen az $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az A magterét, képterét és rangját.