

## Számítási módszerek a fizikában 1, 7. hét

I. Mely  $a, b \in \mathbb{R}$  paraméterek esetén lesz az alábbi mátrixok rangja 1, 2, illetve 3?

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ b & 0 & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 4 & a & b \\ 3a & b+3 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Mátrixhatványok.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok  $k$ -adik ( $k \in \mathbb{N}$ ) hatványát, ahol  $a, b \in \mathbb{R}$  paraméter.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

2. Egy  $A$  négyzetes mátrix esetén legyen

$$e^{-A} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Számítsuk ki az  $e^{tA}$  mátrixot, ahol  $t \in \mathbb{R}$  és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III. Legyen  $n \in \mathbb{N}^+$  és jelölje  $\mathcal{P}_n$  a legfeljebb  $n$ -ed fokú valós polinomok vektorterét. Tekintsük az alábbi  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$  leképezéseket.

$$A : p(x) \mapsto p(x+1)$$

$$B : p(x) \mapsto xp'(x)$$

$$C : p(x) \mapsto \frac{d}{dx}(x \cdot p(x))$$

1. Az  $n = 2$  esetben írjuk fel a fenti leképezések mátrixát az  $e_k(x) = x^{k-1}$  ( $k = 1, \dots, n+1$ ) bázisban.
2. Határozzuk meg ezen mátrixok nyomát és determinánsát.
3. Mit mondhatunk a  $B + C$  lineáris leképezésről?

IV. Legyen  $b \in \mathbb{R}^3$  rögzített vektor. Mi lesz az  $\mathbb{R}^3$  tér standard bázisában a

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad x \mapsto b \times x$$

lineáris leképezés mátrixa? Számoljuk ki ezen mátrix nyomát és determinánsát.

V. Az  $\mathbb{R}^2$  térben tekintsük az  $f_1 = (1, 1)$  és az  $f_2 = (2, -1)$  vektorokból álló  $f$  bázis. Mi lesz az  $x$  (első koordináta-) tengelyre való tükrözés mátrixa az  $f - f$  bázisban?

VI\*. Legyen  $\omega \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|\omega\| \leq \pi$  vektor. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az  $\omega$  vektor által meghatározott tengely körül forgat  $\|\omega\|$  szöggel.